

山东省 2026 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学 III

本试题分为第 I 卷和第 II 卷两部分, 满分 100 分, 考试用时 120 分钟。考试结束后, 将本试题和答题卡一并交回。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上, 并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。

2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号, 答在本试卷上无效。

3. 第 II 卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置; 如需改动, 先划掉原来的答案, 再写上新的答案; 不能使用涂改液、胶带纸、修正带, 不按以上要求作答的答案无效。

第 I 卷

一、单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

在每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其选出并填写在答题卡上对应区域。错填、多填或漏填均不得分。

1. 下列函数为周期函数的是 ()

- A. $|x|$ B. $\cos x$ C. $\sqrt[3]{x}$ D. $\ln(1-x)$

2. 以下函数为有界函数的是 ()

- A. $\sin x$ B. $\ln x$ C. x^2 D. 3^x

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 x 互为等价无穷小的是 ()

- A. $e^{\frac{1}{x}}$ B. $\ln x$ C. $\arctan x$ D. $\cos x - 1$

4. 点 $x=2$ 是函数 $f(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-8}$ 的 ()

- A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点

5. 已知函数 $y = (1 + \sin x)^{\cos x}$, 则 $dy|_{x=\frac{\pi}{2}} =$ ()

- A. $2dx$ B. $-2dx$ C. $\ln 2dx$ D. $-\ln 2dx$

6. 下列曲线拐点为 $(0,0)$ 的是 ()

- A. $y = x^3 - 3x^2$ B. $y = x^4 - 4x$ C. $y = x^2 - 2\sin x$ D. $y = x - \sin x$

7. 已知 $\int_1^3 \frac{f(x)}{2f(x)-3g(x)} dx = 4$, 则 $\int_1^3 \frac{g(x)}{2f(x)-3g(x)} dx =$ ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

8. 已知 $2x + x \arctan x$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f'(x) =$ ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. 6

9. 缺失

10. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2} \int_0^1 f(x) dx = \frac{x^2}{2} + x$, 则定积分 $\int_0^1 xf(x) dx =$ ()

- A. 3 B. -3 C. $\frac{19}{12}$ D. $\frac{4}{3}$

第 II 卷

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. 已知 $f(x) = e^x - 2$, 则 $f^{-1}(4) =$ _____.

12. 已知直线 $x=3$ 是曲线 $y = \frac{x+1}{x^2-2x-k}$ 的垂直渐近线, 则 $k =$ _____.

13. 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x+y) = x^2y - 2x$ 所确定的隐函数, 则 $y'(0) =$ _____.

14. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上连续, 且满足 $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 则

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + 1)^2 f(|\tan x|) dx = \text{_____}.$$

15. 已知函数 $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$, 则 $\int_1^2 (x^2 - 2x + 2) f(x-1) dx =$ _____.

三、计算题 (本大题共 6 小题, 每小题 6 分, 共 36 分)

16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 2} \right)^x$

17. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{xe^x - \sin x}$

18. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2a-b\cos x}{e^x}, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ \frac{a\sin x}{x} + b, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 求实数 a, b 的值.

19. 求曲线 $y = x \ln x$ 通过点 $(0, -1)$ 的切线方程.

20. 求不定积分 $\int \frac{x+3}{9x^2-6x+2} dx$.

21. 求定积分 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

四、应用题 (本大题共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分)

22. 计算由曲线 $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{8x}$ 和直线 $y = 3x - 2$ 所围成的图形面积.

23. 求函数 $y = e^x (\sin x - \cos x - 2) + 2 \cos x + 2x$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上的极值.

五、证明题 (本大题共 1 小题, 共 7 分)

24. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$,

证明: 存在 $\xi, \eta \in (0, 2)$, 使得 $\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} > 4$.



烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2026 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学 III

本试题分为第 I 卷和第 II 卷两部分, 满分 100 分, 考试用时 120 分钟。考试结束后, 将本试题和答题卡一并交回。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上, 并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。

2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号, 答在本试卷上无效。

3. 第 II 卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置; 如需改动, 先划掉原来的答案, 再写上新的答案; 不能使用涂改液、胶带纸、修正带, 不按以上要求作答的答案无效。

第 I 卷

一、单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

在每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其选出并填写在答题卡上对应区域。错填、多填或漏填均不得分。

1. 下列函数为周期函数的是 ()

- A. $|x|$ B. $\cos x$ C. $\sqrt[3]{x}$ D. $\ln(1-x)$

【答案】B

2. 以下函数为有界函数的是 ()

- A. $\sin x$ B. $\ln x$ C. x^2 D. 3^x

【答案】A

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 x 互为等价无穷小的是 ()

- A. e^x B. $\ln x$ C. $\arctan x$ D. $\cos x - 1$

【答案】C

【解析】选项 A: 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $e^x \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $e^x \rightarrow 0$;

选项 B: 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\ln x \rightarrow -\infty$;

选项 C: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan x \sim x$;

选项 D: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$;

4. 点 $x=2$ 是函数 $f(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-8}$ 的 ()

- A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点

【答案】B

【解析】 $f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2+2x-8} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{(x+4)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{6}$

同理 $f(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2+2x-8} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x+4)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{6}$, $f(2^-) = f(2^+)$

5. 已知函数 $y = (1 + \sin x)^{\cos x}$, 则 $dy|_{x=\frac{\pi}{2}} =$ ()

- A. $2dx$ B. $-2dx$ C. $\ln 2 dx$ D. $-\ln 2 dx$

【答案】D

【解析】先用指数对数幂公式将原函数化为复合函数 $y = (1 + \sin x)^{\cos x} = e^{\cos x \cdot \ln(1 + \sin x)}$

再对复合函数求导得 $y' = e^{\cos x \cdot \ln(1 + \sin x)} \left[-\sin x \cdot \ln(1 + \sin x) + \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} \right]$

将 $x = \frac{\pi}{2}$ 代入可得 $y'|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\ln 2$, 则 $dy|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\ln 2 dx$

6. 下列曲线拐点为 $(0, 0)$ 的是 ()

- A. $y = x^3 - 3x^2$ B. $y = x^4 - 4x$ C. $y = x^2 - 2\sin x$ D. $y = x - \sin x$

【答案】D

【解析】选项 A: $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$, $y''|_{x=0} = -6 \neq 0$, 排除;

选项 B: $y' = 4x^3 - 4$, $y'' = 12x^2$, $y''' = 24x$, $y''|_{x=0} = 0$, $y'''|_{x=0} = 0$, 排除

选项 C: $y' = 2x - 2\cos x$, $y'' = 2 + 2\sin x$, $y''|_{x=0} = 2 \neq 0$, 排除

选项 D: $y' = 1 - \cos x$, $y'' = \sin x$, $y''' = \cos x$, $y''|_{x=0} = 0$, $y'''|_{x=0} = 1 \neq 0$, 正确

7. 已知 $\int_1^3 \frac{f(x)}{2f(x)-3g(x)} dx = 4$, 则 $\int_1^3 \frac{g(x)}{2f(x)-3g(x)} dx =$ ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

【答案】C

【解析】 $\int_1^3 \frac{2f(x)-3g(x)}{2f(x)-3g(x)} dx = 2$, 即

$$\int_1^3 \frac{2f(x)-3g(x)}{2f(x)-3g(x)} dx = 2 \int_1^3 \frac{f(x)}{2f(x)-3g(x)} dx - 3 \int_1^3 \frac{g(x)}{2f(x)-3g(x)} dx = 2$$

因为 $\int_1^3 \frac{f(x)}{2f(x)-3g(x)} dx = 4$, 所以 $\int_1^3 \frac{g(x)}{2f(x)-3g(x)} dx = 2$ 8. 已知 $2x + x \arctan x$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f'(x) = ()$ A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{2}$

C. 3

D. 6

【答案】B

【解析】 $f(x) = (2x + x \arctan x)' = 2 + \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$

$$f'(x) = \left(2 + \arctan x + \frac{x}{1+x^2} \right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

9. 缺失

10. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2} \int_0^1 f(x) dx = \frac{x^2}{2} + x$, 则定积分 $\int_0^1 xf(x) dx = ()$

A. 3

B. -3

C. $\frac{19}{12}$ D. $\frac{4}{3}$

【答案】C

【解析】 $\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2} \int_0^1 f(x) dx = \frac{x^2}{2} + x$ 该方程两边同时对 x 求导得

$$f(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = x + 1, \text{ 移项得 } f(x) = x + 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx, \text{ 两边做定积分得}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(x + 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \right) dx, \text{ 积分得 } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} + 1 + \frac{\int_0^1 f(x) dx}{2}$$

解得 $\int_0^1 f(x) dx = 3$, 所以 $f(x) = x + 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = x + \frac{5}{2}$

$$\text{所以 } \int_0^1 x \left(x + \frac{5}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{5}{2}x \right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^2 \right]_0^1 = \frac{19}{12}$$

第II卷

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. 已知 $f(x) = e^x - 2$, 则 $f^{-1}(4) = \underline{\hspace{2cm}}$ 【答案】 $\ln 6$ 【解析】令 $y = e^x - 2$, 则 $e^x = y + 2$, 则 $x = \ln(y + 2)$, 即 $f^{-1}(x) = \ln(x + 2)$, 所以 $f^{-1}(4) = \ln 6$ 12. 已知直线 $x = 3$ 是曲线 $y = \frac{x+1}{x^2-2x-k}$ 的垂直渐近线, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】3

【解析】因为 $x = 3$ 是垂直渐近线, 所以 $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x - k) = 0$, 则 $9 - 6 - k = 0$, 则 $k = 3$ 13. 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x+y) = x^2y - 2x$ 所确定的隐函数, 则 $y'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】-3

【解析】将 $x = 0$ 代入原方程得 $y = 1$, 两边同时求导得 $\frac{1+y'}{x+y} = 2xy + x^2y' - 2$, 将 $x = 0, y = 1$ 代入上式得 $y'(0) = -3$ 14. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上连续, 且满足 $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 则

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + 1)^2 f(|\tan x|) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】2

【解析】因为 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \tan x f(|\tan x|) dx = 0$, 所以 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + 1)^2 f(|\tan x|) dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1 + 2 \tan x) f(|\tan x|) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1) f(\tan x) dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x) f(\tan x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) d(\tan x), \text{ 令 } t = \tan x$$

$$\text{则原式} = 2 \int_0^1 f(t) d(t) = 2.$$

15. 已知函数 $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$, 则 $\int_1^2 (x^2 - 2x + 2) f(x-1) dx =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3} - \frac{e}{2}$

【解析】由题意得 $f(1) = \int_1^1 e^{t^2} dt = 0, f'(x) = e^{x^2}$

$$\text{原式} = \int_1^2 [(x-1)^2 + 1] f(x-1) d(x-1), \text{ 令 } t = x-1$$

$$\text{原式} = \int_0^1 (t^2 + 1) f(t) dt = \int_0^1 f(t) d\left(\frac{1}{3}t^3 + t\right) = \left[\left(\frac{1}{3}t^3 + t\right) f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{3}t^3 + t\right) d[f(t)]$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{1}{3}t^3 + t\right) e^{t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{3}t^2 + 1\right) e^{t^2} dt^2, \text{ 令 } u = t^2$$

$$\text{原式} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{3}u + 1\right) e^u du = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{3}u + 1\right) de^u = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3}u + 1\right) e^u\right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^u d\left(\frac{1}{3}u + 1\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3}u + 1\right) e^u\right]_0^1 + \frac{1}{6} \int_0^1 e^u du = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3}u + 1\right) e^u\right]_0^1 + \frac{1}{6} [e^u]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{e}{2}$$

三、计算题 (本大题共 6 小题, 每小题 6 分, 共 36 分)

16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 2}\right)^x$

【解析】原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \left(\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 2} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{3x+2}{x^2-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{3x^2+2x}{x^2-2}} = e^3$

17. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{xe^x - \sin x}$

【解析】原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{xe^x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{e^x + xe^x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(e^x + xe^x - \cos x)(x+1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x + xe^x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2e^x + xe^x + \sin x} = \frac{1}{2}$$

18. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2a-b\cos x}{e^x}, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ \frac{a\sin x}{x} + b, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求实数 a, b 的值.

【解析】由题意得

$$f(0) = 2, f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{a\sin x}{x} + b\right) = a + b, f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2a-b\cos x}{e^x} = 2a - b$$

因为在 $x=0$ 处连续, 所以 $f(0) = f(0^-) = f(0^+)$, 所以 $a + b = 2a - b = 2$, 解得 $a = \frac{4}{3}, b = \frac{2}{3}$.

19. 求曲线 $y = x \ln x$ 通过点 $(0, -1)$ 的切线方程.

【解析】设切点坐标 $(x_0, x_0 \ln x_0)$, $y' = \ln x + 1$, 则切线斜率为 $k = \ln x_0 + 1$, 则切线方程为

$y - (x_0 \ln x_0) = (\ln x_0 + 1)(x - x_0)$, 将 $(0, -1)$ 代入求得 $x_0 = 1$, 所以切线方程为 $y = x - 1$.

20. 求不定积分 $\int \frac{x+3}{9x^2-6x+2} dx$.

【解析】原式 $= \frac{1}{18} \int \frac{18x-6}{9x^2-6x+2} dx + \frac{10}{3} \int \frac{1}{9x^2-6x+2} dx$
 $= \frac{1}{18} \int \frac{1}{9x^2-6x+2} d(9x^2-6x+2) + \frac{10}{9} \int \frac{1}{(3x-1)^2+1} d(3x-1)$
 $= \frac{1}{18} \ln|9x^2-6x+2| + \frac{10}{9} \arctan(3x-1) + C$

21. 求定积分 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

【解析】令 $x = 2 \sin t$, 则 $t = \arcsin \frac{x}{2}$,

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{8 \sin^3 t + 1}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} d(2 \sin t) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{8 \sin^3 t + 1}{2 \cos t} \cdot 2 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (8 \sin^3 t + 1) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (8\sin^3 t + 1) dt = \left[\frac{8}{3} \cos^3 t - 8 \cos t + t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}$$

四、应用题 (本大题共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分)

22. 计算由曲线 $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{8x}$ 和直线 $y = 3x - 2$ 所围成的图形面积.

【解析】联立 $\begin{cases} y = \sqrt{8x} \\ y = 3x - 2 \end{cases}$, 解得交点 $(2, 4)$; 联立 $\begin{cases} y = \sqrt{8x} \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$, 解得交点 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$;

联立 $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$, 解得交点 $(1, 1)$;

$$\text{所以面积 } S = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\sqrt{8x} - \frac{1}{x} \right) dx + \int_1^2 (\sqrt{8x} - 3x + 2) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{8x} dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} dx + \int_1^2 (2 - 3x) dx$$

$$= \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{2}}^2 - \left[\ln|x| \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[2x - \frac{3}{2}x^2 \right]_1^2 = \frac{13}{6} \ln 2.$$

23. 求函数 $y = e^x (\sin x - \cos x - 2) + 2 \cos x + 2x$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上的极值.

【解析】对函数求导得 $y' = e^x (2 \sin x - 2) - 2 \sin x + 2$, 令 $y' = 0$, 即

$$e^x (2 \sin x - 2) - 2 \sin x + 2 = 0, \text{ 即 } (e^x - 1)(2 \sin x - 2) = 0, \text{ 解得}$$

$x = 0$ 和 $x = \frac{\pi}{2}$ 为驻点, 无不可导点.

当 $x \in (-\pi, 0)$, $y' > 0$, y 在此区间上单调递增; 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $y' < 0$, y 在此区间上单调递

减; 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $y' < 0$, y 在此区间上单调递减; 所以在 $x = 0$ 处取得极大值, 极大值为

$f(0) = -1$, 无极小值.

五、证明题 (本大题共 1 小题, 共 7 分)

24. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$,

证明: 存在 $\xi, \eta \in (0, 2)$, 使得 $\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} > 4$.

【解析】因为 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内可导, 由拉格朗日中值定理得:

$$\exists \xi_1 \in (0, 1), \text{ 使得 } f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 2, \exists \xi_2 \in (1, 2), \text{ 使得 } f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = -1$$

又因为 $f(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上二阶可导, 所以 $f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上连续, 由介值定理可得:

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \in (0, 2), \text{ 使得 } f'(\xi) = \frac{1}{3}, \exists \eta \in (\xi_1, \xi_2) \in (0, 2), \text{ 使得 } f'(\eta) = \frac{1}{4},$$

此时 $\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 7 > 4$, 得证.

山东省2025年统招专升本

考试真题

高等数学(三)真题

本试卷分为第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分。满分100分,考试时间120分钟。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项:

- 1.答题前,考生务必用0.5毫米黑签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上,并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。
- 2.第Ⅰ卷每小题选出答案后,用2B笔把答题卡上对应题目的答标号涂黑如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,答在本试卷上无效。
- 3.第Ⅱ卷答题必须用0.5毫米黑色签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新的答案;不能使用涂改液、胶带纸修正带。不按以上要求作答的答案无效。

第Ⅰ卷

一、单项选择题(本大题共10小题,每题3分,共30分)

- 1.已知函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$,则函数的定义域是()
A $[-3,3]$ B $(-3,3)$ C $(3,+\infty)$ D $(-\infty,3)$
- 2.在 R 上的增函数是()
A $|x|$ B e^x C x^2 D $\cos x$
- 3.在 $x \rightarrow 0$ 时,下列为无穷大量的是()
A $\arctan x$ B $\sin x$ C $\frac{1}{x}$ D x^3
4. $y=\frac{3x+2}{x+5}$ 的水平渐近线是()
A $y=-5$ B $y=1$
C $y=-3$ D $y=3$

5.已知 $f(x)$ 在 $x=2$ 时可导,且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+4h)-f(2+h)}{h}=6$,则 $f'(2)=()$

A 6 B -6 C 2 D -2

6. $y=y(x)$ 由 $e^y=\ln x-xy$ 所确定的函数 $dy=()$

A $\frac{1-xy}{x(e^y+x)}dx$ B $\frac{1+xy}{x(e^y+x)}dx$
C $\frac{1-xy}{x(e^y-x)}dx$ D $\frac{1+xy}{x(e^y-x)}dx$

7. $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x^2 dx$ $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x^3 dx$ $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x^4 dx$ ()

A $I_1 > I_2 > I_3$ B $I_3 > I_2 > I_1$ C $I_3 > I_1 > I_2$ D $I_2 > I_1 > I_3$

8.已知函数 $f(x)$ 在 R 上连续,且 $\int_0^1 xf(x^2)dx=3$,则 $\int_0^1 f(x)dx=()$

A $\frac{3}{2}$ B $\frac{1}{2}$ C 3 D 6

9.已知函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, $\int_0^2 f(x)+xf'(x)dx=1$, $f(2)=()$

A 1 B $\frac{1}{2}$ C 2 D 4

10. $F(x)=\int_0^x \cos(x+t)^2 dt$, $F'(x)=()$

A $2\cos 4x^2 - \cos x^2$ B $\cos x^2 - 2\cos 4x^2$ C $\cos 4x^2 - \cos x^2$ D $\cos x^2 - \cos 4x^2$

第Ⅱ卷

二、填空题(本大题共5小题,每小题3分,共15分)

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n) = 5$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 8$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n b_n =$ _____

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{3x} = 2+k$, $k =$ _____

13. $(0,0)$ 是 $y=\ln(1+x)+ax^2$ 的拐点, 求 $a =$ _____

14.若 $F(x)=5x+\cos 3x$ 是 $f(x)$ 原函数, 则 $f'(x) =$ _____

15.已知函数 $f(x)$ 在 R 上连续, $\int_0^1 f(2x)dx=1$, 则 $\int_0^1 f(x+1)+f(x)dx =$ _____

三、计算题(本大题共8小题, 每小题6分, 共48分)

16 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

17 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{\sin^2 x}$

18 讨论 $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{(x-1)^2} + b, & x < 0 \\ 3, & x = 0 \\ b(1+x)^{\frac{1}{2}}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求实数 ab

19 已知 $y = \begin{cases} x = 3 + \arctan t \\ y = t + e^t \end{cases} \quad t=0$ 时切线方程

20 求不定积分 $\int_0^1 \frac{3x^2+6x+1}{3x^2+1} dx$

21 求定积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}} dx$

22 $f(x) = (2x-3)e^{2x} - 2x^2 + 4x$ 的极值, 并判断极大值极小值

23 $y = \begin{cases} (x-1)^2 & x \leq 1 \\ 4x-4 & x > 1 \end{cases}$ 与 $y = x^2$ 所围成的面积

四、证明题(本大题共1小题, 共7分)

24 若函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 连续, 在 $(0,2)$ 内可导, 且满足 $f(0)=1, f(1)=2, f(2)=4$

试证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,2)$, 使得 $f''(\xi)=1$



高等数学(三)真题答案

选择

1 B 2 B 3 C 4 D 5 C

6 A 7 A 8 D 9 B 10 A

二、填空题

11、-7

12、-3

13、1/2

14、 $-9\cos 3x$

15、2

三、计算题

16 $\frac{2}{3}$

17 1

18 $a=3-\frac{3}{e}, b=\frac{3}{e}$

19 $y=2x-5$

20 $x+\ln(3x^2+1)+c$

21 $4\ln 2-2-\ln^2 2$

22 极大值: $f(0)=3$, 极小值 $f(1)=2-e^2$

23、 $\frac{7}{12}$

四、证明题

24、得证



山东省 2024 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学（Ⅲ）真题试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1、下列函数是奇函数的是（ ）

- A. $\ln x$ B. x^3 C. $\cos x$ D. 2^x

2、下列函数是周期函数的是（ ）

- A. x^2 B. e^x C. $\sin x$ D. $\arcsin x$

3、当 $x \rightarrow 0$ 时，与 x^2 等价无穷小的是（ ）

- A. $\sin^2 x$ B. $\sin 2x$ C. $\cos^2 x$ D. e^{2x-1}

4、 $x=1$ 是函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$ 的（ ）

- A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 振荡间断点 D. 无穷间断点

5、已知函数 $y = f^2(5x)$ ，则 $dy =$ （ ）

- A. $10f(5x)f'(5x)dx$ B. $10f'(5x)dx$

- C. $2f(5x)f'(5x)dx$ D. $2f'(5x)dx$

6、曲线 $y = 3x^5 - 5x^4 + 4x + 2$ 的拐点是（ ）

- A. (1, 2) B. (1, 4) C. (0, 2) D. (0, 4)

7、已知 $I_1 = \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ ， $I_2 = \int_{-1}^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ ， $I_3 = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ ，则下列不等式成立的是（ ）

- A. $I_1 \leq I_2 \leq I_3$ B. $I_2 \leq I_3 \leq I_1$ C. $I_3 \leq I_2 \leq I_1$ D. $I_2 \leq I_1 \leq I_3$

8、 $\int_1^2 \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = (\quad)$

A. $\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x} dx$

B. $\int_1^{\frac{1}{2}} x f(x) dx$

C. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx$

D. $\int_{\frac{1}{2}}^1 x f(x) dx$

9、已知 $\int f(x) dx = e^{-3x} + C$ ，则 $xf(x)$ 的一个原函数为 ()

A. $e^{-3x} \left(x - \frac{1}{3} \right)$

B. $e^{-3x} \left(x + \frac{1}{3} \right)$

C. $e^{-3x} (x-1)$

D. $e^{-3x} (x+1)$

10、已知 $y = (3 + 2 \cos x)^x$ ，则 $y' = (\quad)$

A. $(3 + 2 \cos x)^x \left[\ln(3 + 2 \cos x) - \frac{x}{3 + 2 \cos x} \right]$

B. $-2x \sin x (3 + 2 \cos x)^{x-1}$

C. $(3 + 2 \cos x)^x \left[\ln(3 + 2 \cos x) - \frac{2x \sin x}{3 + 2 \cos x} \right]$

D. $(3 + 2 \cos x)^x \ln(3 + 2 \cos x)$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

11、已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -3$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (b_n + 1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

12、已知 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{a}{x}} = e$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

13、曲线 $y = e^{2x-1} + x^2$ 在点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right)$ 处的法线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14、若 $f(x)$ 满足 $\int_1^2 f(x) dx + 2 \int_2^3 f(x) dx = 2, 2 \int_1^2 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx = 1$ ，则 $\int_1^3 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

15、若函数 $f(x)$ 在 R 上连续，且满足 $f(2) = 3, \int_0^2 t f(x+t) dt = x^2 + 1$ ，则

$$\int_0^2 f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 6 分，共 42 分）

16、求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right).$

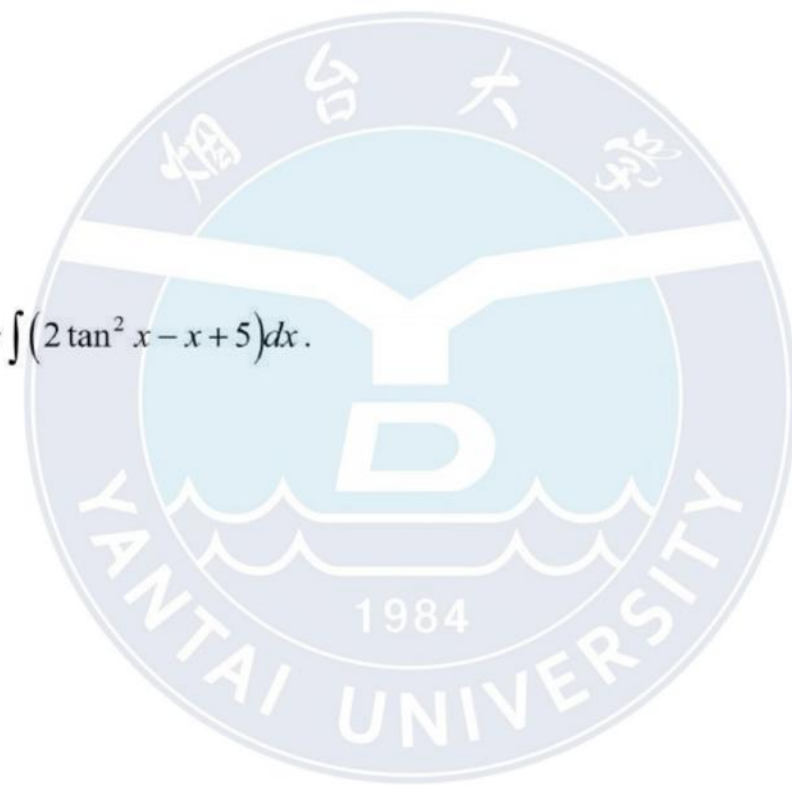
17、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\sin x - x}.$

18、已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2a \cos x + b, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ a\sqrt{x+1} - b, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 和 b 的值.

19、求曲线 $y \ln y - \sin(xy) - x = 0$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

20、求不定积分 $\int (2 \tan^2 x - x + 5) dx$.

21、求定积分 $\int_0^1 x^2 \ln(x^2 + 1) dx$.



烟台大学统招专升本培训中心

22、求曲线 $xy=1$ 与直线 $y=-x+2, y=4x$ 所围成图形的面积.

四、应用题（本大题共 1 小题，每小题 6 分，共 6 分）

23、求函数 $f(x) = (2x^2 - 8x) \ln x - 3x^2 + 16x$ 的极值，并判断是极大值还是极小值.

烟台大学统招专升本培训中心

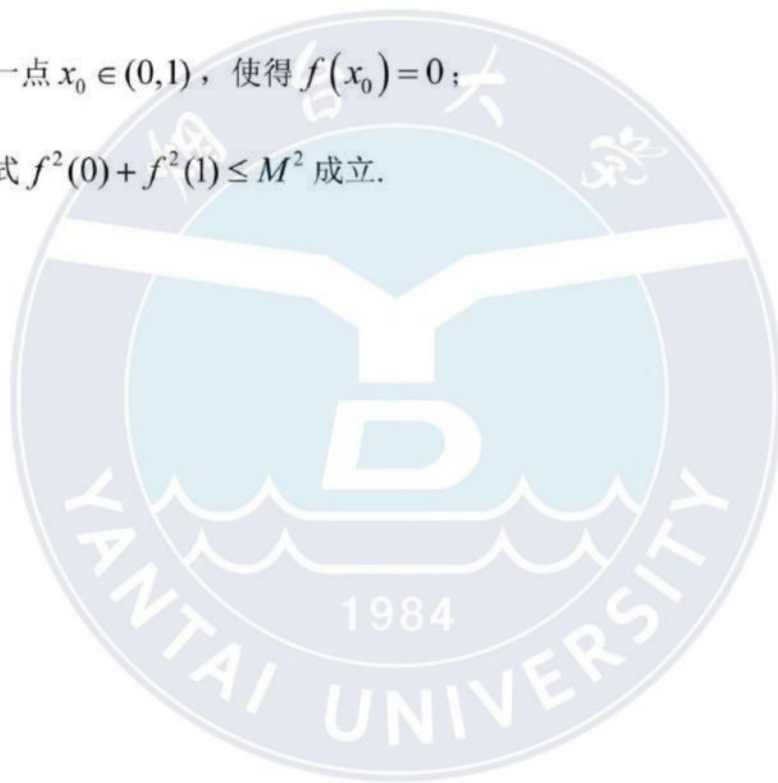
五、证明题（本大题共 1 小题，每小题 7 分，共 7 分）

24、已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足当 $x \in (0,1)$ 时， $|f'(x)| \leq M$ ，

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

证明：（1）存在一点 $x_0 \in (0,1)$ ，使得 $f(x_0) = 0$ ；

（2）不等式 $f^2(0) + f^2(1) \leq M^2$ 成立.



烟台大学统招专升本培训中心

2024 山东专升本-数学3 参考答案

一、单项选择题(本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1.B 2.C 3.A 4.D 5.A
6.B 7.D 8.C 9.B 10.A

二、填空题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. -4 12. $\frac{1}{3}$ 13. $-\frac{1}{3}$ 14. $\frac{7}{5}$ 15. 6

三、计算(本大题共 6 小题, 每小题 6 分, 共 36 分)

16. 解: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x(x-1)(x+1)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(x+1)} = -\frac{1}{2}.$

17. 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{-\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1+x^2} = 2$

18. 解: 由已知, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2a \cos x + b) = 2a + b,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a\sqrt{x+1} - b) = a - b.$$

因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $f(0)=2$

所以 $\begin{cases} a-b=2 \\ 2a+b=2 \end{cases}$, 解得 $a=\frac{4}{3}, b=-\frac{2}{3}$

19. 解: 方程两边对 x 求导, 得 $y' \ln y + y' - (y + xy') \cos xy - 1 = 0.$

则 $y'|_{x=0} = 2$, 即切线的斜率 $k=2$,

所以切线方程为 $y=2x+1$.

20. 解: $\int (2 \tan^2 x - x + 5) dx = \int (2 \sec^2 x - x + 3) dx$

$$= 2 \tan x - \frac{1}{2} x^2 + 3x + C$$

21. 解: $\int_0^1 x^2 \ln(x^2 + 1) dx = \frac{1}{3} [x^3 \ln(x^2 + 1)]_0^1 - \int_0^1 x^3 d \ln(x^2 + 1) = \frac{1}{3} [\ln 2 - 2 \int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} dx]$

$$= \frac{1}{3} \left[\ln 2 - 2 \int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx \right] = \frac{1}{3} \left(\ln 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} \right)$$

四、应用题(本大题共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分)

22.解: 由 $\begin{cases} y=4x, \\ y=-x+2 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} xy=1, \\ y=-x+2 \end{cases}$

得交点分别为 $\left(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (1, 1)$.

由题意可知

$$S = \int_{\frac{2}{5}}^{\frac{1}{2}} [4x - (-x+2)] dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{1}{x} - (-x+2) \right] dx = \left(\frac{5}{2}x^2 - 2x \right) \Big|_{\frac{2}{5}}^{\frac{1}{2}} + \left(\ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\ = \ln 2 - \frac{3}{5}.$$

23.解: 由题意知, 函数的定义域为 $(0, +\infty)$

$$f'(x) = (4x-8)\ln x + \frac{2x^2-8x}{x} - 6x+16 = (4x-8)(\ln x-1).$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = 2, x_2 = e$.

$$f''(x) = 4\ln x - \frac{8}{x}.$$

$$f''(2) = 4(\ln 2 - 1) < 0, f''(e) = 4\left(1 - \frac{2}{e}\right) > 0,$$

则极大值为 $f(2) = 20 - 8\ln 2$, 极小值为 $f(e) = 8e - e^2$

五、证明题 (本大题共 1 小题, 共 7 分)

24.证明: (1) 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 由已知得, $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $F(0) = F(1) = 0$, 由罗尔定理, 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $F'(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = 0$.

(2) 因 $f(x)$ 在 $[0, x_0]$ 上连续, 在 $(0, x_0)$ 内可导, 由拉格朗日中值定理,

$$\text{存在 } \xi_1 \in (0, x_0), \text{ 使得 } f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = -\frac{f(0)}{x_0}.$$

同理, $f(x)$ 在 $[x_0, 1]$ 上应用拉格朗日中值定理,

$$\text{存在 } \xi_2 \in (x_0, 1), \text{ 使得 } f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \frac{f(1)}{1 - x_0}.$$

又 $|f'(x)| \leq M$, 则 $f^2(0) + f^2(1) \leq [x_0^2 + (1-x_0)^2]M^2$.

因 $x_0^2 + (1-x_0)^2 < 1, x_0 \in (0,1)$

从而 $f^2(0) + f^2(1) \leq M^2$.



烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2023 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学 (III)

一、单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. 函数 $e^{\sqrt{x-2}}$ 的定义域为

A. $[2, +\infty)$

B. $(-\infty, -2]$

C. $(-2, 2)$

D. $[-2, 2]$

2. 下列函数在其定义域内有界的是

A. e^x

B. $\ln x$

C. x^2

D. $\cos x$

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 以下不是与 x 为等价无穷小量的是

A. $\sin x$

B. $\tan x$

C. $1 - \cos x$

D. $\ln(1+x)$

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$, 则 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的

A. 可去间断点

B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点

D. 连续点

5. 函数 $y = \sqrt{2x^2 + 3}$, 则 $dy =$

A. $\frac{4x}{\sqrt{2x^2 + 3}} dx$

B. $\frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 3}} dx$

C. $\frac{x}{\sqrt{2x^2 + 3}} dx$

D. $\frac{x}{2\sqrt{2x^2 + 3}} dx$

6. 函数 $y = \ln(2x+5)$, 则 $y'' =$

A. $-\frac{4}{(2x+5)^2}$

B. $\frac{4}{(2x+5)^2}$

C. $-\frac{2}{(2x+5)^2}$

D. $\frac{2}{(2x+5)^2}$

7. 已知 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 $f(2x)$ 的原函数是

A. $2 \sin 2x$

B. $\sin 2x$

C. $2 \sin 2x + 1$

D. $\frac{1}{2} \sin 2x + 1$

8. 函数 $y = (x-1)e^x$ 的拐点是

A. $(-2, -\frac{3}{e^2})$

B. $(-1, -\frac{2}{e})$

C. $(0, -1)$

D. $(1, 0)$

9. 已知 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 可导, $f(4) = 1$, $\int_0^4 xf'(x)dx = 3$, 则 $\int_0^4 f(x)dx$

A. -1

B. 0

C. 1

D. 3

10. 已知 $f(x) = \int_0^{2x} x \sin t^2 dt$, 则 $f'(x)$

A. $x \sin 4x^2$

B. $2x \sin 4x^2$

C. $x \sin 4x^2 + \int_0^{2x} \sin t^2 dt$

D. $2x \sin 4x^2 + \int_0^{2x} \sin t^2 dt$

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. 已知 $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, 则 $f[g(-1)] =$

12. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{4}{3x})^x =$

13. 已知 $\int_a^b f(x)dx = -2$, $\int_a^b g(x)dx = 3$, 则 $\int_a^b [3f(x) + 4g(x)]dx =$

14. 已知隐函数 $y + \ln(x+y-1) = 1$, 则 $\frac{dy}{dx}|_{(1,1)} =$

15. 已知 $f(x) = 3x^2 - 2x + \int_0^3 f(x)dx$, 则 $\int_0^2 f(x)dx =$

三、解答题 (本大题共 6 小题, 每小题 6 分, 共 36 分)

16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$

17. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos x}$

18. 已知 $f(x) = \begin{cases} ae^{x-1}, & x > 1 \\ b, & x = 1 \\ x^2 + ax - b, & x < 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续, 求 a, b

19. 求曲线 $y = xe^{2x} + 1$ 在 $(0, 1)$ 处的法线方程

20. 求不定积分 $\int \arctan x + 2^x dx$

21. 求定积分 $\int_0^1 (x^3 - x)\sqrt{1-x^2} dx$

四、应用题 (本大题共 2 小题, 第 22 小题 6 分, 第 23 小题 7 分, 共 13 分)

22.

23. 已知实数 $a \neq 0$, 求函数 $f(x) = a^2 x^3 - 6ax^2 + 9x$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值

五、应用题 (本大题共 1 小题, 每小题 6 分, 共 6 分)

24. 设函数 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 内具有二阶导数, 且 $3f(2) = 2f(1) + f(4)$, 证明在 $(1, 4)$ 内存在一点 ξ , 使得 $f''(\xi) = 0$

山东省 2023 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学Ⅲ试题参考答案

第 I 卷

一、单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. A 根号下非负, 因此 $x-2 \geq 0$, 因此定义域为: $[2, +\infty)$

2. D 在其定义域内, A 选项 $e^x \in (0, +\infty)$, B 选项 $\ln x \in (-\infty, +\infty)$,

C 选项 $x^2 \in [0, +\infty)$, D 选项 $\cos x \in [-1, +1]$. 因此答案是 D.

3. C $x \rightarrow 0$ 时, A 选项 $\sin x \sim x$, B 选项 $\tan x \sim x$, C 选项 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$,

D. $\ln(1+x) \sim x$, 因此不与 x 等价的是答案 C.

4. B $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$, 左右极限不相等,

因此是跳跃间断点, 选 B.

5. B $y' = (\sqrt{2x^2+3})' = \frac{1}{2\sqrt{2x^2+3}}(2x^2+3)' = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+3}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}$,

所以 $dy = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}} dx$. 选 B.

6. A $y' = (\ln(2x+5))' = \frac{2}{2x+5}$, $y'' = \frac{-4}{(2x+5)^2}$, 答案是 A.

7. D 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x) = \sin x$, 所以

$$\int f(2x) dx = \frac{1}{2} \int f(2x) d2x = \frac{1}{2} F(2x) + C = \frac{1}{2} \sin 2x + C,$$

对照选项, 只有 D 是正确的.

8. B $y' = xe^x$, $y'' = (x+1)e^x$, 二阶导数等于零的点是 $x = -1$, 且 $x = -1$ 左右两侧二阶导数异号, 因此凹内性不同, 且 $y(-1) = -\frac{2}{e}$, 所以拐点是 $(-1, -\frac{2}{e})$. 选 B

9. C $3 = \int_0^4 x f'(x) dx = \int_0^4 x df(x) = [x \cdot f(x)]_0^4 - \int_0^4 f(x) dx = 4f(4) - \int_0^4 f(x) dx$,

代入条件, $3 = 4f(4) - \int_0^4 f(x) dx$, 因此 $\int_0^4 f(x) dx = 1$. 选 C.

10. D 已知 $F(x) = \int_0^{2x} x \sin t^2 dt = x \int_0^{2x} \sin t^2 dt$, 求导得

$$F'(x) = \int_0^{2x} \sin t^2 dt + x \sin(2x)^2 \cdot 2 = 2x \sin(4x^2) + \int_0^{2x} \sin t^2 dt. \text{ 因此选 D.}$$

第 II 卷

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. e 由条件 $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, 复合后得 $f(g(-1)) = f(1) = e$.

12. $e^{-\frac{4}{3}}$ 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{3x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{3x}\right)^{\frac{3x}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = e^{-\frac{4}{3}}$.

13. 6 由已知 $\int_a^b f(x) dx = -2$, $\int_a^b g(x) dx = 3$, 以及定积分的线性性质, 得

$$\int_a^b [3f(x) + 4g(x)] dx = 3 \int_a^b f(x) dx + 4 \int_a^b g(x) dx = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 = 6.$$

14. $-\frac{1}{2}$ 方程 $y + \ln(x+y-1) = 1$ 两边求导, 得 $y' + \frac{1+y'}{x+y-1} = 0$

代入点 (1,1), 求得 $\frac{dy}{dx} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{2}$.

15. -14 令 $\int_0^3 f(x) dx = C$, 并在等式 $f(x) = 3x^2 - 2x + \int_0^3 f(x) dx$

两边从 0 到 3 积分, 得 $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (3x^2 - 2x + C) dx$, 即 $C = 18 + 3C$, $C = -9$,

所以 $f(x) = 3x^2 - 2x - 9$, 因此 $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (3x^2 - 2x - 9) dx = -14$.

三、计算题 (本大题共 6 小题, 每小题 6 分, 共 36 分)

$$16. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2} = \frac{1}{4}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

18. 利用左右连续定义计算:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ae^{x-1} = a = f(1) = b;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax - b) = 1 + a - b = f(1) = b;$$

由上面两个式子求得: $a = b = 1$.

$$19. \text{解: } y' = e^{2x} + 2xe^{2x}, k_{\text{切}} = y'|_{(0,1)} = 1, \text{ 因此 } k_{\text{法}} = -1, \text{ 法线方程 } y - 1 = -x,$$

即 $y = -x + 1$

$$\begin{aligned} 20. \text{解: } \int (\arctan x + 2^x) dx &= \int \arctan x dx + \int 2^x dx \\ &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx + \frac{2^x}{\ln 2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{2^x}{\ln 2} \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{2^x}{\ln 2} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21. \text{解: } \int_0^1 (x^3 - x) \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 1) \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2) \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) \end{aligned}$$

$$\text{令 } t = 1 - x^2, \text{ 上式} = \frac{1}{2} \int_1^0 t \sqrt{t} dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 t \sqrt{t} dt = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = -\frac{1}{5}.$$

四、应用题 (本大题共 2 小题, 第 22 小题 6 分, 第 23 小题 7 分, 共 13 分)

$$22. \text{ 先求交点: 联立 } \begin{cases} y = -x \\ y = -x^2 + 2x + 4 \end{cases} \text{ 得 } x = -1; \text{ 联立 } \begin{cases} y = 2x \\ y = -x^2 + 2x + 4 \end{cases} \text{ 得 } x = 2.$$

因此所求面积

$$S = \int_{-1}^0 [(-x^2 + 2x + 4) - (-x)] dx + \int_0^2 [(-x^2 + 2x + 4) - (2x)] dx = \frac{15}{2}$$

23. 函数的定义域为全体实数 R .

$$f'(x) = 3a^2x^2 - 12ax + 9 = 3(ax-1)(ax-3),$$

$$\text{因此驻点为 } x_1 = \frac{1}{a}, x_2 = \frac{3}{a}.$$

(1) $a > 0$ 时, 列表讨论极值:

x	$(-\infty, \frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}, \frac{3}{a})$	$\frac{3}{a}$	$(\frac{3}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

$$\text{所以极大值 } f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{4}{a}, \text{ 极小值 } f\left(\frac{3}{a}\right) = 0;$$

(2) $a < 0$ 时, 列表讨论

x	$(-\infty, \frac{3}{a})$	$\frac{3}{a}$	$(\frac{3}{a}, \frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

$$\text{所以极大值 } f\left(\frac{3}{a}\right) = 0, \text{ 极小值 } f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{4}{a}.$$

五、证明题 (本大题共 1 小题, 每小题 6 分, 共 6 分)

$$24. \text{ 由条件 } 3f(2) = 2f(1) + f(4), \text{ 得 } 2[f(2) - f(1)] = f(4) - f(2),$$

$$\text{上式两边分别利用拉格朗日中值定理, } 2f'(\xi_1) \cdot 1 = f'(\xi_2) \cdot 2, (1 < \xi_1 < 2 < \xi_2 < 4),$$

$$\text{再在区间 } [\xi_1, \xi_2] \text{ 上使用罗尔定理, 得 } f''(\xi) = 0.$$

山东省 2022 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学 (Ⅲ) 试题

本试卷共 4 页, 满分 100 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷和答题卡指定的位置, 并在答题卡指定位置中粘贴考生条形码。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 须用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。作答非选择题时, 须用 0.5 毫米黑伊签字笔将答案写在答题卡各题目指定区域内相应的位置。答在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其选出并将答题卡的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 函数 $y = \cos \sqrt{4-x^2}$ 的定义域
A. $[2, +\infty)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $[0, 2]$ D. $[-2, 2]$
2. 以下函数是偶函数的是
A. $\frac{1}{x}$ B. $-|x|$ C. $\ln x$ D. $\tan x$
3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 以下函数不是无穷小量的是
A. $x - \sin x$ B. $x - \tan x$ C. $x - \cos x$ D. $1 - \cos x$
4. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$, 则 $x = 3$ 是函数 $f(x)$ 的
A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 无穷间断点 D. 连续点

5. 以下函数在区间 $(0, 1)$ 上单调递减的是

- A. $\ln x$ B. e^x C. $x - \ln x$ D. $e^x - x$

6. 已知函数 $y = f(u)$ 可导, 则 $u = x^3$, 则 $\frac{dy}{dx} =$

- A. $f'(3x^2)$ B. $f'(x^3)$ C. $3x^2 f'(3x^2)$ D. $3x^2 f'(x^3)$

7. 已知函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x) = (x-1)(e^x - 1)$, 则下列说法正确的是

- A. $x = 0$ 是极小值点, $x = 1$ 是极大值点 B. $x = 0$ 是极大值点, $x = 1$ 是极小值点
C. $x = 0$ 是极值点, $x = 1$ 不是极值点 D. $x = 0$ 不是极值点, $x = 1$ 是极值点

8. 已知 e^{-2x} 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f'(x) =$

- A. $4e^{-2x}$ B. $-2e^{-2x}$ C. e^{-2x} D. $-\frac{1}{2}e^{-2x}$

9. 下列定积分大于 1 的是

- A. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ B. $\int_1^2 x dx$ C. $\int_1^2 \sin^2 x dx$ D. $\int_1^2 \cos x^2 dx$

10. 已知 $\int f(x) dx = e^x \sin x + C$, 则 $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx =$

- A. $e^x \sin x + C$ B. $2e^x \sin x + C$ C. $e^{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} + C$ D. $2e^{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} + C$

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$, 则 $f[f(5)] =$ _____.

12. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) \cdot g(x)] =$ _____.

13. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{2x + 1} =$ _____.

14. 已知函数 $y = \cos 3x$, 则微分 $dy =$ _____.

15. 已知 $\int_0^1 f(x) dx + 4 \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + 1$, 则 $\int_1^2 f(x) dx =$ _____.

三、解答题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

16. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{2x}$.

17. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x}{e^x - 1}$.

18. 已知函数 $y = 2x + \frac{1}{x-1}$, 求 y'' .

19. 已知 $f(x) = \begin{cases} e^x + b, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ a + \frac{b \sin x}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 在 $x=0$ 处连续, 求实数 a 和 b 的值.

20. 求曲线 $2x^2 + y^2 = 3$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程.

21. 求不定积分 $\int \left(2x \ln x + \frac{1}{x^2}\right) dx$.

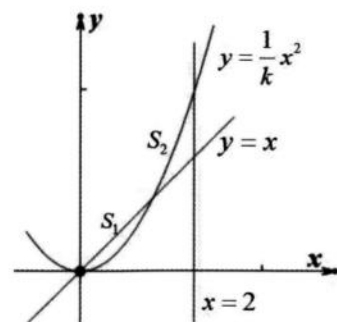
22. 求定积分 $\int_{-1}^3 (\sqrt{x+1} - x) dx$.

23. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上连续, 且 $\int_0^{2x} f(t) dt = \sin x$, 求 $f(x)$.

四、应用题 (本大题共 1 小题, 共 7 分)

24. 已知 $0 < k < 2$, 直线 $y = x, x = 2$ 与曲线 $y = \frac{1}{k}x^2$ 围成两块阴影区域 (如图所示), 其面积分别记为 S_1 和 S_2 , 令 $S = S_1 + S_2$.

(1) 求 S



(2) 问 k 为何值时 S 最小, 最小值是多少



烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2022 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学 (Ⅲ) 试题答案解析

一、单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. (D)

解: 根据题意可知函数定义域满足 $4-x^2 \geq 0$, 解得 $[-2, 2]$, 因此答案选 D

2. (B)

解: 设 $f(x) = \frac{1}{x}$ 为奇函数, $f(x) = -|x|$ 为偶函数; $f(x) = \ln x$ 为非奇非偶函数;

$f(x) = \tan x$ 为奇函数, 因此答案选 B

3. (C)

解: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x \rightarrow 0$, $x - \tan x \rightarrow 0$, $x - \cos x \rightarrow -1$, $1 - \cos x \rightarrow 0$,

因此答案选 C

4. (A)

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x+3} = \frac{1}{2}$, 因此为可去间断点, 答案选 A.

5. (C)

解: 结合图形 $f(x) = \ln x$ 和 $f(x) = e^x$ 为单调递增, 当 $x \in (0, 1)$, $f(x) = x - \ln x$,

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} < 0$, 单调递减; $f(x) = e^x - x$, $f'(x) = e^x - 1 > 0$, 单调递增, 答案选 C.

6. (D)

解: 由题意可知 $\frac{dy}{dx} = [f(x^3)]' = f'(x^3)(x^3)' = 3x^2 f'(x^3)$, 答案选 D

7. (B)

解: $f'(x) = (x-1)(e^x - 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$, $x = 0$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$

函数 $f(x)$ 单调递增, 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$ 函数 $f(x)$ 单调递减, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$

函数 $f(x)$ 单调递增, 因此在 $x = 0$ 处取极大值, 当 $x = 1$ 处极小值, 答案选 B

8. (A)

解: 由题意可知 $f(x) = (e^{-2x})' = -2e^{-2x}$, 进一步 $f'(x) = (-2e^{-2x})' = 4e^{-2x}$, 答案选 A

9. (B)

解: 当 $1 < x < 2$ 时, $\frac{1}{x} < 1$, $\sin^2 x < 1$, $\cos^2 x < 1$, 而 $x > 1$, 根据积分保号性可知

$\int_1^2 x dx > \int_1^2 1 dx = 1$, 因此答案选 B

10. (D)

解: $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int f(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}) = 2e^{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} + C$, 因此答案选 B

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. 3

解: 因为 $5 > 2$, 所以 $f(5) = 0$, 进一步 $f[f(5)] = f[0] = 3$, 因此答案为 3

12. 4

解: $\lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) \cdot g(x)] = 2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 \cdot (-1) \cdot (-2) = 4$, 因此答案为 4

13. $\frac{1}{2}$

解: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{2}$, 因此答案为 $\frac{1}{2}$

14. $-3 \sin 3x dx$

解: $y' = -3 \sin 3x$, $dy = y' dx = -3 \sin 3x dx$, 因此答案 $-3 \sin 3x dx$

15. $\frac{1}{3}$

解: $\int_0^1 f(x) dx + 4 \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + 1$ 化为

$\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + 3\int_2^3 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + 1$, 利用积分可加性得

$\int_0^2 f(x)dx + 3\int_2^3 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + 1$, 整理得 $3\int_2^3 f(x)dx = 1$, 即 $\int_2^3 f(x)dx = \frac{1}{3}$, 因此

答案为 $\frac{1}{3}$

三、解答题(本大题共 7 小题, 每小题 6 分, 共 42 分)

$$\begin{aligned} 16. \text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{4x \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{4x}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17. \text{解: (解法一)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{(解法二)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$$

$$18. \text{解: } y' = (2x)' + \left(\frac{1}{x-1}\right)' = 2 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$y'' = \left(2 - \frac{1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$19. \text{解: 由已知, } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + b) = 1 + b, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(a + \frac{b \sin x}{x}\right) = a + b,$$

又因为函数在 $x=0$ 处连续, 则有 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 且 $f(0)=0$, 所以

$$1+b=a+b=0, \text{ 解得 } a=1, b=-1.$$

$$20. \text{解: } 2x^2 + y^2 = 3 \text{ 两边分别对 } x \text{ 求导得 } 4x + 2y \cdot y' = 0, \text{ 所以 } y' = -\frac{2x}{y}, \text{ 则斜率}$$

$$k = y'|_{(1,1)} = -2, \text{ 由此得则切线方程为 } y-1 = -2(x-1), \text{ 即 } 2x+y-3=0$$

$$\begin{aligned} 21. \text{解: } \int \left(2x \ln x + \frac{1}{x^2}\right) dx &= \int \ln x d(x^2) - \frac{1}{x} \\ &= x^2 \ln x - \int x dx - \frac{1}{x} \\ &= x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

22. 解: (解法一)

$$\text{令 } \sqrt{x+1} = t, \text{ 则 } x = t^2 - 1, dx = 2t dt,$$

当 $x=-1$ 时 $t=0$; 当 $x=3$ 时 $t=2$,

$$\int_{-1}^3 (\sqrt{x+1} - x) dx = \int_0^2 (2t^2 - 2t^3 + 2t) dt$$

$$= \left[\frac{2}{3} t^3 - \frac{2}{4} t^4 + t^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{4}{3}$$

(解法二)

$$\int_{-1}^3 (\sqrt{x+1} - x) dx = \left[\frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^3 = \frac{4}{3}$$

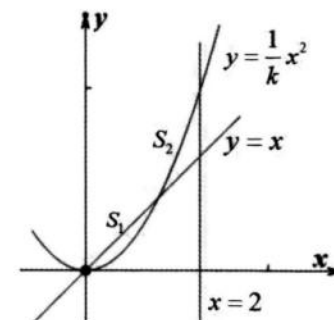
$$23. \text{解: } \int_0^{2x} f(t) dt = \sin x \text{ 两边求导得 } 2f(2x) = \cos x, \text{ 则 } f(2x) = \frac{1}{2} \cos x$$

$$\text{令 } u = 2x \text{ 得 } f(u) = \frac{1}{2} \cos \frac{u}{2}$$

$$\text{即 } f(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$$

四、应用题(本大题共 1 小题, 共 7 分)

$$24. \text{解 (1) 解方程组 } \begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{k} x^2 \end{cases} \text{ 得交点 } (0,0), (k,k),$$



由题意可知, $S = \int_0^k \left(x - \frac{1}{k}x^2 \right) dx + \int_k^2 \left(\frac{1}{k}x^2 - x \right) dx$

$$= \frac{1}{3}k^2 + \frac{8}{3k} - 2$$

$$(2) S(k) = \frac{1}{3}k^2 + \frac{8}{3k} - 2, 0 < k < 2$$

$$S'(k) = \frac{2}{3}k - \frac{8}{3k^2}, \text{ 令 } S'(k) = 0 \text{ 得 } k = \sqrt[3]{4}$$

因为 $S''(\sqrt[3]{4}) = 2 > 0$, 则 $k = \sqrt[3]{4}$ 为函数 $S(k)$ 在 $0 < k < 2$ 上唯一的极小值点

所以当 $k = \sqrt[3]{4}$ 时, 取得最小值 $S(\sqrt[3]{4}) = 2(\sqrt[3]{2} - 1)$



烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2021 年普通高等教育专升本统一考试 高等数学 (Ⅲ) 试题

本试卷分为第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分,共3页。满分100分。考试用时120分钟。考试结束后,将本试卷和答题纸一并交回。

注意事项:

1. 答题前,考生务必用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上,并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,答在本试卷上无效。
3. 第Ⅱ卷答题必须用0.5毫米黑色签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新的答案;不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

第Ⅰ卷

一、单项选择题(每题3分,共30分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的,请将其选出并将答题卡的相应代
码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 函数 $f(x) = \ln(2-x)$ 的定义域是 ()。
(A) $[2, +\infty)$ (B) $(2, +\infty)$ (C) $(-\infty, 2]$ (D) $(-\infty, 2)$
2. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{2x} = 1$, 则 $a =$ ()。
(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 4

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时,以下函数是无穷小量的是 ()。

- (A) $1 - \sqrt[3]{x}$ (B) $1 - e^x$ (C) $1 - \sin x$ (D) $1 - \tan x$

4. 已知函数 $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ()。

- (A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点 (C) 无穷间断点 (D) 连续点

5. 函数 $y = \tan(3x)$ 的微分 $dy =$ ()。

- (A) $3 \sec^2(3x) dx$ (B) $3 \tan(3x) \sec(3x) dx$
(C) $\sec^2(3x) dx$ (D) $\tan(3x) \sec(3x) dx$

6. 函数 $f(x) = e^x - 5x$ 的单调递增区间是 ()。

- (A) $(-\infty, \ln 5]$ (B) $[\ln 5, +\infty)$ (C) $(-\infty, -\ln 5]$ (D) $[-\ln 5, +\infty)$

7. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{e^x} =$ ()。

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $+\infty$

8. 已知 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int f(3x+2) dx =$ ()。

- (A) $3F(x) + C$ (B) $\frac{1}{3}F(x) + C$
(C) $3F(3x+2) + C$ (D) $\frac{1}{3}F(3x+2) + C$

9. 已知函数 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续,且满足 $g(x) > f(x) > 0$, 则下列不等式不成立的是 ()。

- (A) $\int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 g(x) dx$ (B) $\int_0^1 f^2(x) dx < \int_0^1 g^2(x) dx$
(C) $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx < \int_0^1 \frac{1}{g(x)} dx$ (D) $\int_0^1 \frac{1}{f^2(x)} dx > \int_0^1 \frac{1}{g^2(x)} dx$

10. 已知 $y = (2+x^2)^x$, 则 $y' =$ ()。

- (A) $(2+x^2)^x \left[\ln(2+x^2) + \frac{2x^2}{2+x^2} \right]$ (B) $(2+x^2)^x \left[\ln(2+x^2) + \frac{2x}{2+x^2} \right]$
(C) $(2+x^2)^x \left[\ln(2+x^2) + \frac{x^2}{2+x^2} \right]$ (D) $(2+x^2)^x \left[\ln(2+x^2) + \frac{x}{2+x^2} \right]$

第 II 卷

二、填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $g(x) = e^x$, 则 $f[g(0)] =$ _____.

2. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 2b_n) =$ _____.

3. 已知函数 $f(x) = 2^x + x + 3$, 则 $f''(x) =$ _____.

4. 已知 $\int_0^2 f(x) dx = 2$, $\int_0^4 f(x) dx = 5$, 则 $\int_4^2 f(x) dx =$ _____.

5. 已知 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x f(x-t) dt =$ _____.

三、计算题 (每小题 6 分, 共 42 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 2x} - \frac{1}{x} \right)$.

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 2b - e, & x = 0 \\ b + \ln(1+x^2), & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求实数 a 与 b 的值.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^4}{x - \sin x}$.

4. 求曲线 $y = \arctan(1+x)$ 在点 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 处的切线方程和法线方程.

5. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^{x^2 y} = x - y$ 确定的函数, 求 y' .

6. 求不定积分 $\int \frac{x-3}{x^2+1} dx$.

7. 求定积分 $\int_1^2 e^{\sqrt{x-1}} dx$.

四、应用题 (第 1 题 6 分, 第 2 题 7 分, 共 13 分)

1. 求曲线 $y = \sin x \left(\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi \right)$, $y = \cos x \left(\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

2. 设 $k > 0$, 求函数 $f(x) = 2\ln(1+x) + kx^2 - 2x$ 的极值点, 并判断是极大值点还是极小值点.

山东省 2021 年普通高等教育专升本统一考试 高等数学 (Ⅲ) 试题答案解析

一、单项选择题

1. (D)

解: 根据题意可知函数定义域满足 $2-x > 0$, 即 $x < 2$, 所以定义域为 $(-\infty, 2)$, 答案选 (D).

2. (C)

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{2x} = \frac{a}{2} = 1$, 因此 $a = 2$, 答案选 (C).

3. (B)

解: 根据无穷小的定义, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时为无穷小量. (A) 中, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sqrt[3]{x}) = 1$, 不是无穷小; (B) 中, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x) = 0$, 是无穷小; (C) 中 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x) = 1$, 不是无穷小; (D) 中 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \tan x) = 1$ 不是无穷小, 答案选 (B).

4. (C)

解: $x = 0$ 时, $f(x)$ 无意义, 因此是间断点, 进一步 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2-x} = \infty$, 因此是无穷间断点, 答案选 (C).

5. (A)

解: $y' = (\tan 3x)' = 3 \sec^2 3x$, $dy = y' dx = 3 \sec^2 3x dx$, 答案选 (A).

6. (B)

解: 当 $f'(x) \geq 0$ 时, 函数单调递增, 又 $f'(x) = (e^x - 5x)' = e^x - 5 \geq 0$, 即 $x \geq \ln 5$, 所以函数的单调递增区间为 $[\ln 5, +\infty)$, 答案选 (B).

7. (A)

解: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x-1}e^x} = 0$, 答案选 (A).

8. (D)

解: $\int f(3x+2) dx = \frac{1}{3} \int f(3x+2) d(3x+2) = \frac{1}{3} F(3x+2) + C$, 答案选 (D).

9. (C)

解: 因为 $g(x) > f(x) > 0$, 则 $\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{g(x)}$, 根据定积分的保号性可知

$\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx > \int_0^1 \frac{1}{g(x)} dx$, 答案选 (C). (注: 此题题设改为 $g(x) > f(x) > 1$ 更合适)

10. (A)

解: $y = (2+x^2)^x$, 两边同时取对数得 $\ln y = \ln(2+x^2)^x = x \ln(2+x^2)$, 进一步两边同时关于 x 求导得 $\frac{1}{y} y' = \ln(2+x^2) + \frac{2x^2}{2+x^2}$, 解得 $y' = (2+x^2)^x \left(\ln(2+x^2) + \frac{2x^2}{2+x^2} \right)$, 因此 $dy = y' dx = (2+x^2)^x \left(\ln(2+x^2) + \frac{2x^2}{2+x^2} \right) dx$, 答案选 (A).

二、填空题

1. $\frac{1}{2}$

解: $g(0) = e^0 = 1$, $f(g(0)) = f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

2. 12

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 2b_n) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$.

3. $2^x (\ln 2)^2$

解: $f'(x) = 2^x \ln 2 + 1$, $f''(x) = (2^x \ln 2 + 1)' = 2^x (\ln 2)^2$.

4. -3

解: $\int_4^2 f(x) dx = \int_4^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = -\int_0^4 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = -5 + 2 = -3$.

5. $f(x)$

解: $\frac{d}{dx} \int_0^x f(x-t) dt \stackrel{u=x-t}{=} \frac{d}{dx} \int_x^0 f(u) d(x-u) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(u) du = f(x)$.

三、计算题

1. 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+2}{x^2+2x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+2-(x+2)}{x(x+2)} \right)$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{x(x+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+2} \\
 &= -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

2. 解: 左极限 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [b + \ln(1+x^2)] = b$.

右极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(1+ax)^{\frac{1}{ax}}]^a = e^a$.

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$.

$$\text{得 } \begin{cases} e^a = 2b - e \\ b = 2b - e \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 1 \\ b = e \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
 3. \text{ 解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^4}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 4x^3}{1 - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + 12x^2}{\sin x} \\
 &= 6.
 \end{aligned}$$

$$4. \text{ 解: 因为 } y' = \frac{1}{x^2 + 2x + 2},$$

$$\text{所以 } k = y' \big|_{x=0} = \frac{1}{2},$$

$$\text{由此得切线方程为: } y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}x,$$

$$\text{即 } x - 2y + \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$\text{法线方程为: } y - \frac{\pi}{4} = -2x,$$

$$\text{即 } 2x + y - \frac{\pi}{4} = 0.$$

5. 解: 方程两边对 x 求导得,

$$e^{x^2y}(2xy + x^2y') = 1 - y',$$

$$\text{解得 } y' = \frac{1 - 2xye^{x^2y}}{1 + x^2e^{x^2y}}.$$

$$\begin{aligned}
 6. \text{ 解: } \int \frac{x-3}{x^2+1} dx &= \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{3}{x^2+1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} d(x^2+1) - 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 3 \arctan x + C.
 \end{aligned}$$

7. 解: 令 $\sqrt{x-1} = t$, 则 $x = 1+t^2$, $dx = 2t dt$.

当 $x=1$ 时, $t=0$; 当 $x=2$ 时, $t=1$.

$$\int_1^2 e^{\sqrt{x-1}} dx = 2 \int_0^1 e^t t dt = 2(t e^t \big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt) = 2e - 2e^t \big|_0^1 = 2.$$

四、应用题

$$1. \text{ 解: } S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -\cos x \big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \sin x \big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}.$$

2. 解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$, 求导得 $f'(x) = \frac{2x(kx+k-1)}{1+x}$.

令 $f'(x) = 0$, 即 $2x(kx+k-1) = 0$, 得驻点 $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{k} - 1$.

(1) 当 $k=1$ 时,

因为 $f'(x) = \frac{2x^2}{1+x} \geq 0$, 所以 $f(x)$ 无极值点.

(2) 当 $0 < k < 1$ 时, $x_2 > x_1$,

x	$(-1, 0)$	0	$(0, \frac{1}{k}-1)$	$\frac{1}{k}-1$	$(\frac{1}{k}-1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$x_1 = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点; $x_2 = \frac{1}{k} - 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(3) 当 $k > 1$ 时, $x_2 < x_1$,

x	$\left(-1, \frac{1}{k}-1\right)$	$\frac{1}{k}-1$	$\left(\frac{1}{k}-1, 0\right)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$x_1=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点; $x_2=\frac{1}{k}-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点.



烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2020 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学 (Ⅲ) 试题

本试卷分为第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分,共4页。满分100分。考试用时120分钟。考试结束后,将本试卷和答题纸一并交回。

注意事项:

1. 答题前,考生务必用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上,并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,答在本试卷上无效。
3. 第Ⅱ卷答题必须用0.5毫米黑色签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新的答案;不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

第Ⅰ卷

一、单项选择题 (每题3分,共15分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的,请将其选出并将答题卡的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 以下区间是函数 $y = \sin x$ 的单调递增区间的是 ()。

(A) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (B) $[0, \pi]$ (C) $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (D) $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时,以下函数是无穷小量的是 ()。

(A) e^x (B) $x+1$ (C) $\sin x$ (D) $\cos x$

3. $\left(\frac{\cos x}{x}\right)' = ()$ 。

(A) $\sin x$ (B) $-\sin x$ (C) $\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$ (D) $\frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$

4. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+2} = ()$ 。

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $+\infty$

5. 函数 $y = x^3 + \sqrt{x}$ 的微分 $dy = ()$ 。

(A) $\left(3x^2 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx$ (B) $\left(3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

(C) $\left(x^2 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx$ (D) $\left(x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

6. $\frac{d}{dx} \int_0^x \tan t^2 dt = ()$ 。

(A) $2x \tan 2x$ (B) $2x \tan x^2$ (C) $\tan 2x$ (D) $\tan x^2$

7. 不定积分 $\int f'(x) dx = ()$ 。

(A) $f(x)$ (B) $f'(x)$ (C) $f(x) + C$ (D) $f'(x) + C$

8. 点 $x=1$ 是函数 $y = \frac{x-1}{x^2-1}$ 的 ()。

(A) 连续点 (B) 可去间断点 (C) 跳跃间断点 (D) 无穷间断点

9. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y = x - y$ 所确定的隐函数,则 $y' = ()$ 。

(A) $e^y + 1$ (B) $1 - e^y$ (C) $\frac{1}{e^y + 1}$ (D) $\frac{1}{1 - e^y}$

10. 已知函数 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上连续,且 $\int_{-1}^0 f(x) dx = 2$, $\int_0^1 f(2x) dx = 1$ 。则 $\int_{-1}^2 f(x) dx = ()$ 。

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

第Ⅱ卷

二、填空题 (每题3分,共15分)

1. 函数 $y = \sqrt{x-3}$ 的定义域是_____。

2. 曲线 $y = 2\ln x + 1$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线的斜率 $k =$ _____.

3. 已知函数 $f(x) = e^{2x}$, 则 $f''(x) =$ _____.

4. 若 $\int_0^1 f(x) dx = 2$, 则 $\int_0^1 [3f(x) - 2] dx =$ _____.

5. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{3}{x}} =$ _____.

三、计算题 (每题 6 分, 共 42 分)

1. 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$, 求复合函数 $f[f(x)]$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x - 1}{2x}$.

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin x}{x} + b, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ \frac{x}{2} - a, & x < 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续, 求实数 a 与 b 的值.

5. 已知函数 $y = x^2 \ln(2x + 1)$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1}$.

6. 求不定积分 $\int \frac{2x^2 \cos 4x - 3}{x^2} dx$.

7. 求定积分 $\int_1^4 \frac{1 + \ln x}{\sqrt{x}} dx$.

四、应用题 (每题 7 分, 共 14 分)

1. 求函数 $f(x) = 2x^2 - 3x^2 - 12x + 5$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值.

2. 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$, $y = \frac{1}{4}x$ 所围成的在第一象限内的图形的面积.

烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2020 年普通高等教育专升本统一考试 高等数学 (Ⅲ) 试题答案解析

一、单项选择题

1. (A)

解: 结合函数图形, 或 $y' = \cos x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上大于零, 因此 $y = \sin x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 答案选 (A) .

2. (C)

解: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, 答案选 (C) .

3. (D)

解: 根据导数的除法运算法则可知,

$$\left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{(\cos x)'x - \cos x(x)'}{x^2} = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}, \text{ 答案选 (D) .}$$

4. (A)

解: 由洛必达法则可知, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, 答案选 (A) .

5. (B)

解: $dy = y' dx = (x^3 + \sqrt{x})' dx = (3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}) dx$, 答案选 (B) .

6. (D)

解: 根据变限积分求导公式 $\frac{d}{dx} \left(\int_0^x f(t) dt \right) = f(x)$ 得, $\frac{d}{dx} \int_0^x \tan t^2 dt = \tan x^2$, 答案选 (D) .

7. (C)

解: 根据不定积分的性质可知 $\int f'(x) dx = f(x) + C$, 答案选 (C) .

8. (B)

解: 因为函数 $y = \frac{x-1}{x^2-1}$ 在 $x=1$ 处没有意义, 因此间断, 又 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$, 所以 $x=1$ 是函数的可去间断点, 答案选 (B) .

9. (C)

解: 方程两边同时关于 x 求导数得, $e^y y' = 1 - y'$, 解得 $y' = \frac{1}{e^y + 1}$, 答案选 (C) .

10. (D)

解: $\int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) d(t) = 1$, 因此 $\int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 f(x) dx = 2$, 则 $\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = 4$, 答案选 (D) .

二、填空题

1. $[3, +\infty)$

解: 由题意可知, 函数的定义域满足 $x-3 \geq 0$, 解得 $x \geq 3$, 因此函数的定义域为 $[3, +\infty)$.

2. 2

解: 由导数的几何意义可知, 切线的斜率等于函数在该点的导数值, 因此

$$k = y'(1) = \left(\frac{2}{x}\right)_{x=1} = 2.$$

3. $4e^{2x}$

解: $f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}$.

4. 4

$$\text{解: } \int_0^1 [3f(x) - 2] dx = 3 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 2 dx = 6 - 2 = 4.$$

5. e^{-6}

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}}]^{(-6)} = e^{-6}.$$

三、计算题

1. 解: 由 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, 可知

$$\begin{aligned} f[f(x)] &= \frac{f(x)+1}{f(x)-1} \\ &= \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} \\ &= x. \end{aligned}$$

2. 解: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x - 1}{2x}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

4. 解: 由已知,

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{a \sin x}{x} + b \right) = a + b$$

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{2} - a \right) = -a$$

因为函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 且 $f(0)=2$

$$\text{所以 } \begin{cases} a+b=2 \\ -a=2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}.$$

5. 解: $\frac{dy}{dx} = 2x \ln(2x+1) + \frac{2x^2}{2x+1}$

所以, $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = 2\ln 3 + \frac{2}{3}$.

6. 解: $\int \frac{2x^2 \cos 4x - 3}{x^2} dx$

$$\begin{aligned} &= 2 \int \cos 4x dx - 3 \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{3}{x} + C \end{aligned}$$

7. 解: 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$, 且

当 $x=1$ 时, $t=1$; 当 $x=4$ 时, $t=2$

因此

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1+\ln x}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^2 \frac{1+\ln t^2}{t} 2t dt \\ &= 2 \int_1^2 (1+2\ln t) dt \\ &= 2 \int_1^2 dt + 4 \int_1^2 \ln t dt \\ &= 2 + 4t \ln t \Big|_1^2 - 4 \int_1^2 t (\ln t) dt \\ &= 2 + 8\ln 2 - 4 \int_1^2 dt \\ &= 8\ln 2 - 2. \end{aligned}$$

四、应用题

1. 解: 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 且

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12,$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = -1$, $x = 2$

在 $(-\infty, -1)$ 内, $f'(x) > 0$;

在 $(-1, 2)$ 内, $f'(x) < 0$;

在 $(2, +\infty)$ 内, $f'(x) > 0$;

故驻点 $x = -1$ 是一个极大值点, 驻点 $x = 2$ 是一个极小值点

极大值为 $f(-1) = 12$, 极小值为 $f(2) = -15$.

2. 解: 解方程组 $\begin{cases} y = x, \\ y = \frac{1}{x}, \end{cases}$

得到两组解 $x = -1, y = -1$ (舍去) 及 $x = 1, y = 1$.

得交点为: $(1, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right)$. 因此, 所求的图形的面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{4}x\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x\right) dx \\ &= \frac{3}{8}x^2 \Big|_0^1 + \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{8}x^2 \Big|_1^2 \\ &= \ln 2. \end{aligned}$$



烟台大学统招专升本培训中心