

山东省 2026 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学II

本试题分为第I卷和第II卷两部分，满分 100 分，考试用时 120 分钟。考试结束后，将本试题和答题卡一并交回。

注意事项:

1.答题前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上，并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。

2.第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在本试卷上无效。

3.第 II 卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置；如需改动，先划掉原来的答案，再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带，不按以上要求作答的答案无效。

第I卷

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将答题卡的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1.下列函数中是周期函数的是（ ）

- A. x^2 B. 2^x C. $\arctan x$ D. $\cos x$

2.当 $x \rightarrow 0$ 时，与 x 为等价无穷小的是（ ）

- A. $\tan(2x)$ B. $x - \sin x$ C. $\sin x$ D. $1 - \cos x$

3.微分方程 $y'' - 16y' = 0$ 的通解为（ ）

- A. $y = C_1 + C_2 e^{16x}$ B. $y = C_1 x + C_2 e^{16x}$

- C. $y = C_1 x^{4x} + C_2 e^{-4x}$ D. $y = (C_1 + C_2 x) e^{4x}$

4.已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin(ax), & x \leq 0 \\ be^x - ax + a, & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，则（ ）

- A. $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$ B. $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$

- C. $a = 1, b = 0$ D. $a = 0, b = 1$

5.以下等式中成立的是（ ）

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x} \right)^x = e$

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{x} \right)^x = e$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e$

第II卷

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6.已知函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = x + 1$ 则 $f^{-1}[g(1)] =$ _____.

7.已知函数 $y = y(x)$ 是由方程 $y(e^x - 1) + \arcsin(x + y) = 0$ 所确定，则 $y'|_{x=0} =$ _____.

8.已知函数 $z = \frac{xy}{y-x}$ ，则全微分 $dz =$ _____.

9.已知函数 $f(x) = \int_1^x \sin t^2 dt$ ，则 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(2x) dx =$ _____.

10.已知二重积分 $I = \int_{-1}^0 dx \int_0^{5-x^2} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{4x}^{5-x^2} f(x, y) dy$ ，则交换积分次序后 $I =$ _____.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 7 分，共 56 分）

11.求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-5}{x^2-1} + \frac{2}{x-1} \right)$.

12.求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x - \sin x}{e^x - \cos x - x}$.

13.求不定积分 $\int \frac{x-2}{x^2+4} dx$.

14.求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} [\cos x + \ln(\cos x)] \sin x dx$.

15.求曲线 $y = e^x + 3x$ 过点 $(1, 3)$ 的切线方程.

16.求微分方程 $xy' + y = 1 + 2x \arctan x$ 满足初始条件 $y(1) = 0$ 的特解.

17. 求二重积分 $\iint_D x dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}}$ 和直线 $y = |x - 1|$ 所围成的封闭区域.

18. 求函数 $f(x, y) = 9x^2 + 18x - 18xy - 6y + 2y^3$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值.

四、应用题 (本大题共 1 小题, 每小题 7 分, 共 7 分)

19. 求由曲线 $y = \sqrt{3x}$, $y = \sqrt{4 - x^2}$ 与直线 $y = 3x - 6$ 所围成的图形的面积.

五、证明题 (本大题共 1 小题, 每小题 7 分, 共 7 分)

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上有二阶连续导数, 在区间 $(0, 4)$ 内满足 $f'(x) > 0$ 且 $f(0) = f(4) = 0$,

证明: $\forall x \in [0, 4]$, 有 $f(x) \leq \int_0^4 |f''(x)| dx$.



烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2026 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学I

本试题分为第I卷和第II卷两部分，满分 100 分，考试用时 120 分钟。考试结束后，将本试题和答题卡一并交回。

注意事项:

1.答题前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上，并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。

2.第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在本试卷上无效。

3.第 II 卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置；如需改动，先划掉原来的答案，再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带，不按以上要求作答的答案无效。

第I卷

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将答题卡的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1.下列函数中是周期函数的是（ ）

- A. x^2 B. 2^x C. $\arctan x$ D. $\cos x$

【答案】D

2.当 $x \rightarrow 0$ 时，与 x 为等价无穷小的是（ ）

- A. $\tan(2x)$ B. $x - \sin x$ C. $\sin x$ D. $1 - \cos x$

【答案】C

3.微分方程 $y'' - 16y' = 0$ 的通解为（ ）

- A. $y = C_1 + C_2 e^{16x}$ B. $y = C_1 x + C_2 e^{16x}$

- C. $y = C_1 x^{4x} + C_2 e^{-4x}$ D. $y = (C_1 + C_2 x) e^{4x}$

【答案】A

【解析】可得特征方程为 $r^2 - 16r = 0$ 解得特征根为两个实数根 $r_1 = 0$ 和 $r_2 = 16$ ，则通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{16x}$$

4.已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin(ax), & x \leq 0 \\ be^x - ax + a, & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，则（ ）

- A. $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$ B. $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$

- C. $a = 1, b = 0$ D. $a = 0, b = 1$

【答案】B

【解析】首先可导必连续，所以 $f(0^-) = f(0^+) = f(0)$ ，可得 $a + b = 1$ ，再由可导得左右导相等

$$f'_-(0) = f'_+(0), \text{ 可得到 } a = 2b, \text{ 由此可解得 } a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$$

5.以下等式中成立的是（ ）

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x} \right)^x = e$

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{x} \right)^x = e$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e$

【答案】B

【解析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\left[\sqrt{1+x^2} - (x-1) \right]}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{(1+x^2) - (x-1)^2}{\sqrt{1+x^2} + (x-1)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2x}{\sqrt{1+x^2} + (x-1)}} = e$$

第II卷

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6.已知函数 $f(x) = \ln x$ ， $g(x) = x + 1$ 则 $f^{-1}[g(1)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 e^2

【解析】令 $y = \ln x$ ，则 $x = e^y$ ，即 $f^{-1}(x) = e^x$ ， $g(1) = 2$ 则 $f^{-1}[g(1)] = f^{-1}(2) = e^2$

7.已知函数 $y = y(x)$ 是由方程 $y(e^x - 1) + \arcsin(x + y) = 0$ 所确定，则 $y'|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】-1

【解析】将 $x=0$ 代入原方程可得 $y=0$ ，原方程两边同时对 x 求导得

$$y'(e^x - 1) + y \cdot e^x + \frac{1+y'}{\sqrt{1-(x+y)^2}} = 0, \text{ 将 } x=0, y=0 \text{ 代入可得 } y'|_{x=0} = -1$$

8. 已知函数 $z = \frac{xy}{y-x}$ ，则全微分 $dz =$ _____.

【答案】 $dz = \frac{y^2}{(y-x)^2} dx - \frac{x^2}{(y-x)^2} dy$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{(y-x)^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{(y-x)^2}$ 则 $dz = \frac{y^2}{(y-x)^2} dx - \frac{x^2}{(y-x)^2} dy$

9. 已知函数 $f(x) = \int_1^x \sin t^2 dt$ ，则 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(2x) dx =$ _____.

【答案】 $\frac{\cos 1 - \sin 1}{48}$

【解析】由题意得 $f'(x) = \sin x^2$ ，且 $f(1) = 0$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(2x) dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} f(2x) dx^3 = \frac{1}{3} \left[f(2x) \cdot x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} x^3 d[f(2x)]$$

$$= 0 - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} x^3 f'(2x) dx = -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} x^3 \sin 4x^2 dx = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \sin 4x^2 dx^2$$

$$\text{令 } t = x^2, \text{ 则原式} = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{4}} t \sin 4t dt = \frac{1}{12} \int_0^{\frac{1}{4}} t d \cos 4t = \frac{1}{12} \left[t \cos 4t \right]_0^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{12} \cos 4t dt = \frac{\cos 1 - \sin 1}{48}$$

10. 已知二重积分 $I = \int_{-1}^0 dx \int_0^{5-x^2} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{4x}^{5-x^2} f(x, y) dy$ ，则交换积分次序后 $I =$ _____.

【答案】 $\int_0^4 dy \int_{-1}^{\frac{y}{4}} f(x, y) dx + \int_4^5 dy \int_{-\sqrt{5-y}}^{\sqrt{5-y}} f(x, y) dx$

【解析】由原来的 x 型积分可得积分不等式 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 5-x^2 \end{cases}, \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 4x \leq y \leq 5-x^2 \end{cases}$

画出积分区域，转化为 y 型积分的积分不等式 $\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ -1 \leq x \leq \frac{y}{4} \end{cases}, \begin{cases} 4 \leq y \leq 5 \\ -\sqrt{5-y} \leq x \leq \sqrt{5-y} \end{cases}$

即可得原式 $= \int_0^4 dy \int_{-1}^{\frac{y}{4}} f(x, y) dx + \int_4^5 dy \int_{-\sqrt{5-y}}^{\sqrt{5-y}} f(x, y) dx$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 7 分，共 56 分）

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-5}{x^2-1} + \frac{2}{x-1} \right)$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-5}{x^2-1} + \frac{2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-5+2(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x+1} = \frac{3}{2}$

12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x - \sin x}{e^x - \cos x - x}$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x - \sin x}{e^x - \cos x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + 1 - \cos x}{e^x + \sin x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + \sin x}{e^x + \cos x} = 2$

13. 求不定积分 $\int \frac{x-2}{x^2+4} dx$.

【解析】 $\int \frac{x-2}{x^2+4} dx = \int \frac{x}{x^2+4} dx - \int \frac{2}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+4} d(x^2+4) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+4} d(x^2+4) - \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} d\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) - \arctan\left(\frac{1}{2}x\right) + C$$

14. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} [\cos x + \ln(\cos x)] \sin x dx$.

【解析】 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} [\cos x + \ln(\cos x)] \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} [\cos x + \ln(\cos x)] d \cos x$ ，令 $t = \cos x$ 则

$$\text{原式} = -\int_1^{\frac{1}{2}} (t + \ln t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (t + \ln t) dt = \left[\frac{1}{2} t^2 + t \ln t - t \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{8}$$

15. 求曲线 $y = e^x + 3x$ 过点 $(1, 3)$ 的切线方程.

【解析】设切点坐标 $(x_0, e^{x_0} + 3x_0)$, $y' = e^x + 3$, 则切线斜率为 $k = e^{x_0} + 3$, 则切线方程为

$$y - (e^{x_0} + 3x_0) = (e^{x_0} + 3)(x - x_0), \text{ 将 } (1, 3) \text{ 代入求得 } x_0 = 2, \text{ 所以切线方程为 } y = (e^2 + 3)x - e^2$$

16. 求微分方程 $xy' + y = 1 + 2x \arctan x$ 满足初始条件 $y(1) = 0$ 的特解.

【解析】原方程化为 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x} + 2 \arctan x$, 由此得 $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{1}{x} + 2 \arctan x$

$$\begin{aligned} \text{通解为 } y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int \left(\frac{1}{x} + 2 \arctan x \right) e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = \frac{1}{x} \left[\int \left(\frac{1}{x} + 2 \arctan x \right) x dx + C \right] \\ &= \frac{1}{x} \left[\int (1 + 2x \arctan x) dx + C \right] = \frac{1}{x} \left[\int (2x \arctan x) dx + x + C \right] = \frac{1}{x} \left[\int (\arctan x) dx^2 + x + C \right] \\ &= \frac{1}{x} \left[x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx + x + C \right] = \frac{1}{x} (x^2 \arctan x + \arctan x + C) = x \arctan x + \frac{\arctan x}{x} + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

将 $y(1) = 0$ 代入通解得 $C = -\frac{\pi}{2}$, 特解为 $y = x \arctan x + \frac{\arctan x}{x} - \frac{\pi}{2x}$

17. 求二重积分 $\iint_D x dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}}$ 和直线 $y = |x - 1|$ 所围成的封闭区域.

【解析】先画出积分区域, 时椭圆的上半部分和 $y = |x - 1|$ 围成的封闭图形, 选取 x 型积分, 分成

$$\text{两个积分区域, 写出积分区域不等式 } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} \end{cases}, \begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x - 1 \leq y \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} \end{cases}$$

$$\iint_D x dx dy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}} x dy + \int_1^{\frac{3}{2}} dx \int_{x-1}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}} x dy = \int_0^{\frac{3}{2}} x \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} dx + \int_0^1 x(x-1) dx + \int_1^{\frac{3}{2}} x(-x+1) dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{3}{2}} x \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} dx + \int_0^1 x(x-1) dx + \int_1^{\frac{3}{2}} x(-x+1) dx = \left[-\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{13}{24} \end{aligned}$$

18. 求函数 $f(x, y) = 9x^2 + 18x - 18xy - 6y + 2y^3$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值.

【解析】先求一阶偏导 $\begin{cases} f_x = 18x + 18 - 18y \\ f_y = -18x - 6 + 6y^2 \end{cases}$, 令一阶偏导等于零求驻点, 令 $\begin{cases} 18x + 18 - 18y = 0 \\ -18x - 6 + 6y^2 = 0 \end{cases}$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \text{ 求二阶偏导 } \begin{cases} f_{xx} = 18 \\ f_{xy} = -18 \\ f_{yy} = 12y \end{cases}$$

$$\text{将 } (0, 1) \text{ 代入二阶偏导计算 } \begin{cases} A = 18 \\ B = -18, \text{ 则 } AC - B^2 = -108 < 0, (0, 1) \text{ 不是极值点} \\ C = 12 \end{cases}$$

$$\text{将 } (1, 2) \text{ 代入二阶偏导计算 } \begin{cases} A = 18 \\ B = -18, \text{ 则 } AC - B^2 = 108 > 0, \text{ 且 } A > 0 \therefore (1, 2) \text{ 是极小值点,} \\ C = 24 \end{cases}$$

极小值为 $f(1, 2) = -5$, 无极大值.

四、应用题 (本大题共 1 小题, 每小题 7 分, 共 7 分)

19. 求由曲线 $y = \sqrt{3x}$, $y = \sqrt{4 - x^2}$ 与直线 $y = 3x - 6$ 所围成的图形的面积.

【解析】联立 $\begin{cases} y = \sqrt{3x} \\ y = 3x - 6 \end{cases}$, 解得交点 $(3, 3)$; 联立 $\begin{cases} y = \sqrt{3x} \\ y = \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$, 解得交点 $(1, \sqrt{3})$;

所以面积

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 (\sqrt{3x} - \sqrt{4 - x^2}) dx + \int_2^3 (\sqrt{3x} - 3x + 6) dx = \int_1^3 \sqrt{3x} dx - \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx + \int_2^3 (6 - 3x) dx \\ &= \left[\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 - \left(\frac{1}{6} \cdot 4\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left[6x - \frac{3}{2} x^2 \right]_2^3 = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

五、证明题（本大题共 1 小题，每小题 7 分，共 7 分）

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上有二阶连续导数，在区间 $(0, 4)$ 内满足 $f(x) > 0$ 且 $f(0) = f(4) = 0$ ，

证明： $\forall x \in [0, 4]$ ，有 $f(x) \leq \int_0^4 |f''(x)| dx$ 。

证明：

当 $x = 0$ 和 $x = 4$ 时，不等式恒成立；

当 $x \in (0, 4)$ 时，因为二阶可导，所以由拉氏中值定理可得：

$$\exists \xi_1 \in (0, x), \text{ 使得 } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x};$$

$$\exists \xi_2 \in (x, 4), \text{ 使得 } f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(x)}{4 - x} = \frac{-f(x)}{4 - x};$$

化简不等式（放缩），放缩的思路是要将绝对值拿出来

$$\int_0^4 |f''(x)| dx \geq \int_{\xi_1}^{\xi_2} |f''(x)| dx \geq \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f''(x) dx \right| = |f'(\xi_2) - f'(\xi_1)| = \left| \frac{f(x)}{x} + \frac{f(x)}{4 - x} \right|$$

$$= |f(x)| \left(\frac{1}{4 - x} + \frac{1}{x} \right)$$

令 $g(x) = \frac{1}{4 - x} + \frac{1}{x}$ ，求 $x \in (0, 4)$ 上的最小值，利用求导的方法， $g'(x) = \frac{1}{(4 - x)^2} - \frac{1}{x^2}$ ，令

$g'(x) = 0$ ，解得驻点 $x = 2$ ，是极小值点也是最小值点， $g(x) \geq g(2) = 1$ ，所以

原式 $\geq |f(x)| \times 1 = |f(x)| \geq f(x)$ ，即 $\int_0^4 |f''(x)| dx \geq f(x)$ ，得证。

烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2025 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学 II

本试题分为第 I 卷和第 II 卷两部分, 满分 100 分, 考试用时 120 分钟。考试结束后, 将本试题和答题卡一并交回。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上, 并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。
2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号, 答在本试卷上无效。
3. 第 II 卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置; 如需改动, 先划掉原来的答案, 再写上新的答案; 不能使用涂改液、胶带纸、修正带, 不按以上要求作答的答案无效。

第 I 卷

一、单项选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

在每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其选出并填写在答题卡上对应区域。错填、多填或漏填均不得分。

1. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 下列函数为无穷大量的是 () .
A. e^x B. $\frac{1}{x}$ C. $\sin x$ D. $\arctan x$
2. 设 $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ 1-x^2, & x < 0 \end{cases}$, 则 $x=0$ 为函数的 () .
A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点
3. 微分方程 $(y'')^2 - 2y'' + 3y' + 4y^3 = 0$ 的阶数为 () .
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
4. 若 $f'(5) = 2$, 且 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(5+k\Delta x) - f(5+\Delta x)}{\Delta x} = 3$, 则 $k =$ () .
A. 2 B. 3 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

5. 已知 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\cos x} dx, I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{1-\cos x} dx$, 下列不等式成立的是 ()

- A. $I_1 \leq I_3 \leq I_2$ B. $I_2 \leq I_1 \leq I_3$ C. $I_3 \leq I_2 \leq I_1$ D. $I_3 \leq I_1 \leq I_2$

第 II 卷

二、填空题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 已知 $f(x) = e^{x-1}$, 则 $f[f(1)] =$ _____.
7. 已知 $\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$, 在 $t=0$ 相应的点处的切线斜率是 _____.
8. 设点 $(0, -3)$ 是函数 $y = (x-3)e^x + x^3 + ax^2$ 的拐点, 则 $a =$ _____.
9. 已知 $\int_0^3 f(x) dx = 1$, 则 $\int_0^1 f(3x) dx =$ _____.
10. 已知二重积分 $I = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\sqrt{2y-4}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$, 交换积分次序后, $I =$ _____.

三、解答题(本大题共 7 小题, 每小题 7 分, 共 49 分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^{3x-1}$
12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x - \arctan x}$
13. 求不定积分 $\int \frac{(3+2\ln x)^2}{x} dx$
14. 求定积分 $\int_0^1 x \arctan \sqrt{x} dx$
15. 求微分方程 $(x^2+3)y' = 2xe^{-y}$ 的通解.
16. 设二元函数 $z = f(x, y)$ 由 $e^{2x+z} = x^2 - y^2 z$ 所确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

17. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 D 是由 $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 所围成.

四、应用题 (本大题共 2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

18. 函数 $f(x) = (x^2 - 4x - 12)\ln(2 + x) - \frac{1}{2}x^2 + 6x$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值.

19. 求由曲线 $y = x^2 + 1$, $y = \sqrt{x}$ 与直线 $x = 0, x = 2$ 围成图形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体体积.

五、证明题 (本大题共 1 小题, 每小题 7 分, 共 7 分)

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内可导, 当 $\int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx - 1$ 时, 证明: 存在

$\xi \in (0, 2)$, 使得 $f'(\xi) = 1$ 成立.



烟台大学统招专升本培训中心

山东专升本 2025 学年考试真题

高等数学 II 【参考答案】

本试题分为第 I 卷和第 II 卷两部分, 满分 100 分, 考试用时 120 分钟。考试结束后, 将本试题和答题卡一并交回。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上, 并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。

2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号, 答在本试卷上无效。

3. 第 II 卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置; 如需改动, 先划掉原来的答案, 再写上新的答案; 不能使用涂改液、胶带纸、修正带, 不按以上要求作答的答案无效。

第 I 卷

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

在每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其选出并填写在答题卡上对应区域。错填、多填或漏填均不得分。

1. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 下列函数为无穷大量的是 ()。

- A. e^x B. $\frac{1}{x}$ C. $\sin x$ D. $\arctan x$

【答案】A

【解析】 $x \rightarrow +\infty$ 时, $e^x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, $\sin x$ 极限在 -1 到 1 之间振荡, $\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 所以

e^x 为无穷大量。

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ 1-x^2, & x < 0 \end{cases}$, 则 $x=0$ 为函数的 ()。

- A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点

【答案】C

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x^2) = 1$, 在 $x=0$ 处左右两侧极限存在但是不相等, 所以该点为跳跃间断点。

3. 微分方程 $(y'')^2 - 2y'' + 3y' + 4y^3 = 0$ 的阶数为 ()。

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

【解析】由该方程的形式可知, 该方程的阶数为 2 阶, 故为二阶微分方程。

4. 若 $f'(5) = 2$, 且 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(5+k\Delta x) - f(5+\Delta x)}{\Delta x} = 3$, 则 $k =$ ()。

- A. 2 B. 3 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

【答案】D

【解析】因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(5+k\Delta x) - f(5+\Delta x)}{\Delta x} = (k-1)f'(5) = 2(k-1) = 3$, 所以 $k = \frac{5}{2}$ 。

5. 已知 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin x} dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\cos x} dx$, $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{1-\cos x} dx$, 下列不等式成立的是 ()。

- A. $I_1 \leq I_3 \leq I_2$ B. $I_2 \leq I_1 \leq I_3$ C. $I_3 \leq I_2 \leq I_1$ D. $I_3 \leq I_1 \leq I_2$

【答案】D

【解析】 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin x \leq \cos x$, $e^{\sin x} \leq e^{\cos x}$, 那么 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\cos x} dx$ 。现比较 $\sin x$ 和

$1 - \cos x$ 的大小, 设函数 $f(x) = 1 - \cos x - \sin x$, 则 $f(0) = 0$, 又 $f'(x) = \sin x - \cos x$, 在

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin x \leq \cos x$, 即 $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x) \leq f(0)$, 那么 $f(x) \leq 0$,

即 $1 - \cos x - \sin x \leq 0$, 因此 $1 - \cos x \leq \sin x$, $e^{1-\cos x} \leq e^{\sin x}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{1-\cos x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin x} dx$, 综上

$I_3 \leq I_1 \leq I_2$ 。

第 II 卷

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 已知 $f(x) = e^{x-1}$, 则 $f[f(1)] =$ _____。

【答案】1

【解析】 $f(1) = 1$, $f[f(1)] = f(1) = 1$

7. 已知 $\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$, 在 $t=0$ 相应的点处的切线斜率是 _____。

【答案】2

【解析】 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \frac{3t^2 + 2}{1 - \sin t} \Big|_{t=0} = 2$, 所以切线斜率是 2。

8. 设点 $(0, -3)$ 是函数 $y = (x-3)e^x + x^3 + ax^2$ 的拐点, 则 $a =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $y' = (x-3)e^x + e^x + 3x^2 + 2ax = (x-2)e^x + 3x^2 + 2ax$;

$y'' = (x-2)e^x + e^x + 6x + 2a = (x-1)e^x + 6x + 2a$; 把 $y''|_{x=0} = 0$ 代入得 $a = \frac{1}{2}$.

9. 已知 $\int_0^3 f(x)dx = 1$, 则 $\int_0^1 f(3x)dx =$ _____.

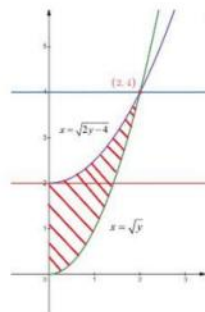
【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 令 $3x = t$, $x = \frac{t}{3}$, 则 $\int_0^1 f(3x)dx = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t)dt = \frac{1}{3}$.

10. 已知二重积分 $I = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)dx + \int_2^4 dy \int_{\sqrt{2y-4}}^{\sqrt{y}} f(x, y)dx$, 交换积分次序后, $I =$ _____.

【答案】 $I = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{\frac{1}{2}x^2+2} f(x, y)dy$

【解析】 如图所示



三、解答题 (本大题共 7 小题, 每小题 7 分, 共 49 分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^{3x-1}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x+2} \right)^{\frac{x+2}{2}} \right]^{\frac{2}{x+2}(3x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{6x-2}{x+2}} = e^6$

12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x - \arctan x}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x - \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{\frac{1}{3}x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

13. 求不定积分 $\int \frac{(3+2\ln x)^2}{x} dx$

【解析】

$\int \frac{(3+2\ln x)^2}{x} dx = \int (3+2\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{1}{2} \int (3+2\ln x)^2 d(3+2\ln x) = \frac{1}{6} (3+2\ln x)^3 + C$

14. 求定积分 $\int_0^1 x \arctan \sqrt{x} dx$

【解析】 令 $\sqrt{x} = t$, $dx = dt^2$, $x=0$ 时, $t=0$, $x=1$ 时, $t=1$

$\int_0^1 x \arctan \sqrt{x} dx = \int_0^1 t^2 \arctan t dt^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \arctan t dt^4 = \frac{1}{2} t^4 \arctan t \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^4}{1+t^2} dt$
 $= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^4 - 1 + 1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 (t^2 - 1) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} t^3 - t \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \arctan t \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

15. 求微分方程 $(x^2+3)y' = 2xe^{-y}$ 的通解.

【解析】 $e^y dy = \frac{2x dx}{x^2+3}$, $\int e^y dy = \int \frac{2x}{x^2+3} dx$, $\int e^y dy = \int \frac{1}{x^2+3} d(x^2+3)$, $e^y = \ln|x^2+3| + C$,

所以通解 $e^y = \ln|x^2+3| + C$.

16. 设二元函数 $z = f(x, y)$ 由 $e^{2x+z} = x^2 - y^2 z$ 所确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

【解析】 令 $F = e^{2x+z} - x^2 + y^2 z$, $F'_x = 2e^{2x+z} - 2x$, $F'_y = 2yz$, $F'_z = e^{2x+z} + y^2$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2e^{2x+z} - 2x}{e^{2x+z} + y^2} = \frac{2x - 2e^{2x+z}}{e^{2x+z} + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yz}{e^{2x+z} + y^2}$.

17. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, 其中 D 是由 $y = \sqrt{2x-x^2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 所围成.

【解析】

$$\text{联立} \begin{cases} y = \sqrt{2x - x^2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r \sqrt{r^2} dr = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \Big|_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^3\theta d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \cdot \cos\theta d\theta = \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\theta) d\sin\theta = \frac{8}{3} \left(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \frac{8}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} \right) = \frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \right) = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

四、应用题 (本大题共 2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

18. 函数 $f(x) = (x^2 - 4x - 12)\ln(2+x) - \frac{1}{2}x^2 + 6x$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值.

【解析】

由题意得, $x \in (-2, +\infty)$,

$$\text{则 } f'(x) = (2x-4)\ln(2+x) + \frac{x^2-4x-12}{x+2} - x + 6 = (2x-4)\ln(2+x),$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \text{ 得, } x = 2 \text{ 或 } x = -1, \quad f''(x) = 2\ln(2+x) + \frac{2x-4}{2+x},$$

$$f''(-1) = -6 < 0, f''(2) = 2\ln 4 > 0, \text{ 所以极小值 } f(2) = -16\ln 4 + 10, \text{ 极大值 } f(-1) = -\frac{13}{2}$$

19. 求由曲线 $y = x^2 + 1, y = \sqrt{x}$ 与直线 $x = 0, x = 2$ 围成图形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体体积.

【解析】

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 [(x^2+1)^2 - (\sqrt{x})^2] dx = \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1 - x) dx = \pi \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{176}{15}\pi. \end{aligned}$$

五、证明题 (本大题共 1 小题, 每小题 7 分, 共 7 分)

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内可导, 当 $\int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx - 1$ 时, 证明: 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $f'(\xi) = 1$ 成立.

【证明】

法一: 令 $F(x) = \int_0^x [f(t) - t] dt$ 在 $[0, 2]$ 上二阶可导, 所以 $F(0) = 0$,

$$F(1) = \int_0^1 [f(t) - t] dt = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2}, F(2) = \int_0^2 [f(t) - t] dt = \int_0^2 f(x) dx - 2, \text{ 由拉格朗日中值定理可得, 存在 } a \in (0, 1), b \in (1, 2), \text{ 使得 } F'(a) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2},$$

$$F'(b) = \frac{F(2) - F(1)}{2 - 1} = \int_0^2 f(x) dx - 2 - \left(\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} \right) = \int_1^2 f(x) dx - \frac{3}{2}, \text{ 因为}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx - 1, \text{ 所以 } F'(b) = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2}, \text{ 所以 } F'(a) = F'(b), \text{ 由罗尔定理可得, 存在 } \xi \in (a, b) \subset (0, 2), \text{ 使得 } F''(\xi) = 0, \text{ 即 } f'(\xi) = 1.$$

法二: 令 $F(x) = \int_1^x f(t) dt - \frac{1}{2}x^2$ 在 $[0, 2]$ 上二阶可导, 则 $F'(x) = f(x) - x$. 由拉格朗日中值定理

$$\text{可得, 存在 } a \in (0, 1), b \in (1, 2), \text{ 使得 } F'(a) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = -\frac{1}{2} - \int_1^0 f(t) dt,$$

$$F'(b) = \frac{F(2) - F(1)}{2 - 1} = \int_1^2 f(t) dt - 2 + \frac{1}{2}, \text{ 因为 } \int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx - 1, \text{ 所以}$$

$$F'(b) = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \int_1^0 f(x) dx, \text{ 所以 } F'(a) = F'(b), \text{ 由罗尔定理可得, 存在}$$

$$\xi \in (a, b) \subset (0, 2), \text{ 使得 } F''(\xi) = 0, \text{ 即 } f'(\xi) = 1.$$

机密★启用前

山东省 2024 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学 II

本试题分为第 I 卷和第 II 卷两部分, 满分 100 分, 考试用时 120 分钟。考试结束后, 将本试题和答题卡一并交回。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上, 并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。
2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号, 答在本试卷上无效。
3. 第 II 卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置; 如需改动, 先划掉原来的答案, 再写上新的答案; 不能使用涂改液、胶带纸、修正带, 不按以上要求作答的答案无效。

第 I 卷

一、单项选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

在每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其选出并填写在答题卡上对应区域。错填、多填或漏填均不得分。

1. 函数 $y = \sin \sqrt{3-x}$ 的定义域是 ()。

- A. $(3, +\infty)$ B. $[3, +\infty)$ C. $(-\infty, 3)$ D. $(-\infty, 3]$

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 以下函数是无穷小量的是 ()。

- A. $\cos x$ B. e^x C. $\ln(1+x)$ D. $\arcsin(1+x)$

3. 曲线 $y = \frac{x+1}{x-3}$ 的垂直渐近线是 ()。

- A. $x=1$ B. $x=-1$ C. $x=3$ D. $x=-3$

4. 已知函数 $f(x)$ 的导数是 e^{2x} , 则以下函数是 $f(x)$ 的一个原函数的是 ()。

- A. $\frac{1}{4}e^{2x} + x$ B. $\frac{1}{4}e^{2x} + x^2$ C. $4e^{2x} + x$ D. $4e^{2x} + x^2$

5. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上连续, $F(x) = \int_0^{2x} f(2x-t)dt$, 则 $F'(x) =$ ()

- A. $-2f(2x)$ B. $2f(2x)$ C. $-2f(x)$ D. $2f(x)$

第 II 卷

二、填空题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x}{2})^{\frac{4}{\sin x}} =$ _____。

7. 已知函数 $f(x) = \arctan x + (x-2)^3$, 则 $f''(1) =$ _____。

8. 已知 $\int_a^b [f(x) + 3g(x)]dx = 8$, $\int_a^b [2f(x) - g(x)]dx = 2$, 则 $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx =$ _____。

9. 已知函数 $z = \ln(2x+3y)$, 则全微分 $dz =$ _____。

10. 已知函数 $f(x, y)$ 在 R^2 上连续, 设 $I = \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)dy + \int_2^3 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}-3} f(x, y)dy$ 则交换积分次序后 $I =$ _____。

三、解答题(本大题共 7 小题, 每小题 7 分, 共 49 分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+3x} - \sqrt{4-3x}}{x}$

12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{1-x+\ln x}$

13. 求曲线 $y = 2^x + x^2 - 2x$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程。

14. 求不定积分 $\int (xe^{3x} + \cos x) dx$

15. 求定积分 $\int_{-1}^1 \frac{|x| - x - 2}{x^2 + 1} dx$.

16. 求微分方程 $(1 + x^3)y' + 3x^2y - \ln x = 0$ 的通解.

17. 计算二重积分 $\iint_D x dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 与直线 $y = x$, $y = 2x - 2$ 所围成的闭区域.

四、应用题 (本大题共 2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

18. 求曲线 $y = 2\sqrt{x}$ 与直线 $y = x + 1$, $y = -x$ 所围成的图形的面积.

19. 求函数 $f(x, y) = 2x^3 + 12xy - 3y^2 - 30x$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值.

五、证明题（本大题共 1 小题，每小题 7 分，共 7 分）

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，当 $x \in (a, b)$ 时， $|f'(x)| \leq M$ ，且

$\int_a^b f(x) dx = 0$ ，证明 $|f(a)| + |f(b)| \leq M(b-a)$ 成立.



烟台大学统招专升本培训中心

山东专升本 2024 学年考试真题

高等数学 II 【参考答案】

本试题分为第 I 卷和第 II 卷两部分, 满分 100 分, 考试用时 120 分钟。考试结束后, 将本试题和答题卡一并交回。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上, 并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。

2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号, 答在本试卷上无效。

3. 第 II 卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置; 如需改动, 先划掉原来的答案, 再写上新的答案; 不能使用涂改液、胶带纸、修正带, 不按以上要求作答的答案无效。

第 I 卷

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

在每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其选出并填写在答题卡上对应区域。错填、多填或漏填均不得分。

1. 函数 $y = \sin \sqrt{3-x}$ 的定义域是 ()。

A. $(3, +\infty)$ B. $[3, +\infty)$ C. $(-\infty, 3)$ D. $(-\infty, 3]$

【答案】D

【解析】 $y = \sin x$ 的定义域为 $x \in R$, $y = \sqrt{x}$ 的定义域为 $x \in [0, +\infty)$, 所以由 $3-x \geq 0$ 可得, 函

数 $y = \sin \sqrt{3-x}$ 的定义域是 $x \in (-\infty, 3]$ 。

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 以下函数是无穷小量的是 ()。

A. $\cos x$ B. e^x C. $\ln(1+x)$ D. $\arcsin(1+x)$

【答案】C

【解析】当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x \rightarrow 1$, $e^x \rightarrow 1$, $\ln(1+x) \rightarrow 0$, $\arcsin(1+x) \rightarrow \arcsin 1$

3. 曲线 $y = \frac{x+1}{x-3}$ 的垂直渐近线 ()。

A. $x=1$ B. $x=-1$ C. $x=3$ D. $x=-3$

【答案】C

【解析】由 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3} = \infty$ 可得, 曲线 $y = \frac{x+1}{x-3}$ 的垂直渐近线为 $x=3$

4. 已知函数 $f(x)$ 的导数是 e^{2x} , 则以下函数是 $f(x)$ 的一个原函数的是 ()。

A. $\frac{1}{4}e^{2x} + x$ B. $\frac{1}{4}e^{2x} + x^2$ C. $4e^{2x} + x$ D. $4e^{2x} + x^2$

【答案】A

【解析】由题意得 $f'(x) = e^{2x}$, 所以 $f(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$, 所以 $f(x)$ 的原函数为

$\int f(x) dx = \int \frac{1}{2}e^{2x} + C_1 dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2$ 。

5. 已知 $f(x)$ 在 R 上连续, $F(x) = \int_0^{2x} f(2x-t) dt$, 则 $F'(x) =$ ()。

A. $-2f(2x)$ B. $2f(2x)$ C. $-2f(x)$ D. $2f(x)$

【答案】B

【解析】令 $u = 2x-t$, $t = 2x-u$, $dt = d(2x-u) = -du$, 原式 $= -\int_{2x}^0 f(u)(-du) = \int_0^{2x} f(u) du$,

$F'(x) = 2f(2x)$ 。

第 II 卷

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x}{2})^{\frac{4}{\sin x}} =$ _____。

【答案】 e^2

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x}{2})^{\frac{4}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x}{2})^{\frac{2}{x} \cdot \frac{4}{2 \sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{2 \sin x}} = e^2$ 。

7. 已知函数 $f(x) = \arctan x + (x-2)^3$, 则 $f''(1) =$ _____。

【答案】 $-\frac{13}{2}$

【解析】 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 3(x-2)^2$, $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + 6(x-2)$, $f''(1) = -\frac{13}{2}$ 。

线

封

密

8. 已知 $\int_a^b [f(x) + 3g(x)]dx = 8$, $\int_a^b [2f(x) - g(x)]dx = 2$, 则 $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx =$ _____.

【答案】4

【解析】设

$$\int_a^b f(x)dx = A, \int_a^b g(x)dx = B, \int_a^b [f(x) + 3g(x)]dx = A + 3B = 8,$$

$$\int_a^b [2f(x) - g(x)]dx = 2A - B = 2, \text{ 解得 } A = B = 2, \text{ 则 } \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = A + B = 4.$$

9. 已知函数 $z = \ln(2x + 3y)$, 则全微分 $dz =$ _____

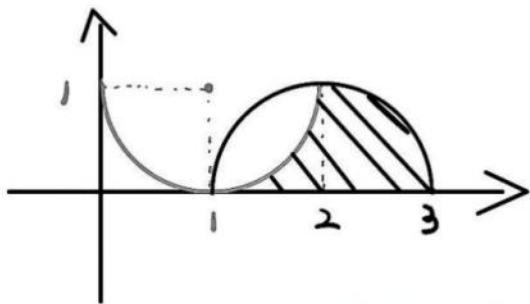
【答案】 $\frac{2}{2x+3y}dx + \frac{3}{2x+3y}dy$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{2x+3y}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2x+3y},$

所以 $dz = \frac{2}{2x+3y}dx + \frac{3}{2x+3y}dy$

10. 已知函数 $f(x, y)$ 在 R^2 上连续, 设 $I = \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)dy + \int_2^3 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}-3} f(x, y)dy$ 则交换积分次序后 $I =$ _____.

【答案】 $I = \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx$



【解析】

三、解答题 (本大题共 7 小题, 每小题 7 分, 共 49 分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+3x} - \sqrt{4-3x}}{x}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+3x} - \sqrt{4-3x}}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+3x} - \sqrt{4-3x})(\sqrt{4+3x} + \sqrt{4-3x})}{x(\sqrt{4+3x} + \sqrt{4-3x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+3x-4+3x}{4x}$$

$$= \frac{3}{2}$$

12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{1-x+\ln x}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{1-x+\ln x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{-1 + \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{-1 + \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} = -1$$

13. 求函数 $y = 2^x + x^2 - 2x$ 在点 (1,1) 处的切线.

【解析】

$$y'|_{x=1} = (2^x \ln 2 + 2x - 2)|_{x=1} = 2 \ln 2,$$

所以切线方程为 $y - 1 = 2 \ln 2 \cdot (x - 1)$, 即 $y = x \cdot 2 \ln 2 - 2 \ln 2 + 1$

14. 求不定积分 $\int (xe^{3x} + \cos x)dx$

【解析】 $\int (xe^{3x} + \cos x)dx$

线

封

密

$$= \int x e^{3x} dx + \int \cos x dx$$

$$= \int x d \frac{1}{3} e^{3x} + \sin x$$

$$= \frac{x}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx + \sin x$$

$$= \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + \sin x + C$$

15. 求定积分 $\int_{-1}^1 \frac{|x|-x-2}{x^2+1} dx$.

【解析】

$$\int_{-1}^1 \frac{|x|-x-2}{x^2+1} dx = \int_{-1}^1 \frac{|x|-2}{x^2+1} dx - \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1} dx = 2 \int_0^1 \frac{x-2}{x^2+1} dx - 0$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx - 4 \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} d(x^2+1) - 4 \arctan x \Big|_0^1$$

$$= \ln(x^2+1) \Big|_0^1 - 4 \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right)$$

$$= \ln 2 - \pi$$

16. 求微分方程 $(1+x^3) \frac{dy}{dx} + 3x^2 y - \ln x = 0$ 的通解.

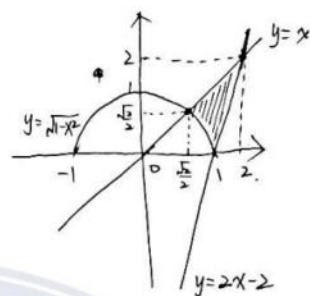
【解析】 $\frac{dy}{dx} + \frac{3x^2}{1+x^3} y = \frac{\ln x}{1+x^3}$, 所以通解 $y = e^{-\int \frac{3x^2}{1+x^3} dx} \left(\int e^{\int \frac{3x^2}{1+x^3} dx} \cdot \frac{\ln x}{1+x^3} dx + C \right)$

$$= e^{\frac{\ln \frac{1}{x^3+1}}{x^3+1}} \left(\int e^{\ln(1+x^3)} \cdot \frac{\ln x}{1+x^3} dx + C \right) = \frac{1}{x^3+1} \left(\int (x^3+1) \cdot \frac{\ln x}{1+x^3} dx \right)$$

$$= \frac{1}{x^3+1} \left(\int \ln x dx + C \right) = \frac{1}{1+x^3} (x \ln x - x + C).$$

17. 计算二重积分 $\iint_D x dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x$, $y = 2x-2$ 所围成的区域.

【解析】



联立 $\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \\ y = x \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, 联立 $\begin{cases} y = 2x-2 \\ y = x \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$.

$$\iint_D x dx dy = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^x x dy + \int_1^2 dx \int_{2x-2}^x x dy = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x(x - \sqrt{1-x^2}) dx + \int_1^2 (-x^2 + 2x) dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x \sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^2 + x^2 \Big|_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{2}}{12} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

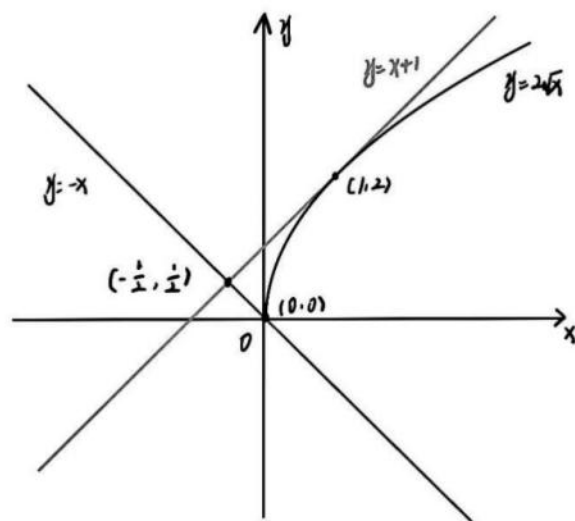
四、应用题 (本大题共 2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

18. 求曲线 $y = 2\sqrt{x}$ 与直线 $y = x+1$, $y = -x$ 所围成图形的面积.

【解析】

解交点坐标:

由 $\begin{cases} y = 2\sqrt{x} \\ y = x+1 \end{cases}$ 得交点 $(1, 2)$, 由 $\begin{cases} y = 2\sqrt{x} \\ y = -x \end{cases}$ 得交点 $(0, 0)$, 由 $\begin{cases} y = x+1 \\ y = -x \end{cases}$ 得交点 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



$$\begin{aligned} \text{所以 } S &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 (x+1) - (-x) dx + \int_0^1 (x+1) - 2\sqrt{x} dx \\ &= (x^2 + x) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 + \left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

19. 求函数 $f(x, y) = 2x^3 + 12xy - 3y^2 - 30x$ 极值, 并判断是极大值还是极小值.

【解析】

$$f'_x(x, y) = 6x^2 + 12y - 30, \quad f'_y(x, y) = 12x - 6y$$

$$\text{令 } \begin{cases} 6x^2 + 12y - 30 = 0 \\ 12x - 6y = 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = -5 \\ y = -10 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{而 } f''_{xx}(x, y) = 12x, f''_{xy}(x, y) = 12, f''_{yy}(x, y) = -6$$

$$\text{所以, 当 } \begin{cases} x = -5 \\ y = -10 \end{cases} \text{ 时,}$$

$$A = f''_{xx}(-5, -10) = -60, \quad B = 12, \quad C = -6,$$

$$AC - B^2 = 360 - 144 = 216 > 0$$

且 $A < 0$, 所以 $(-5, -10)$ 为函数得极大值点,

$$\text{极大值 } f(-5, -10) = 2 \times (-5)^3 + 12 \times (-5) \times (-10) - 3 \times (-10)^2 - 30 \times (-5) = 200.$$

$$\text{当 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 时,}$$

$$A = f''_{xx}(1, 2) = 12, \quad B = 12, \quad C = -6,$$

$$AC - B^2 = -72 - 144 = -216 < 0, \text{ 所以 } (1, 2) \text{ 不是极值点.}$$

综上: 函数 $f(x, y) = 2x^3 + 12xy - 3y^2 - 30x$ 有极大值 $f(-5, -10) = 200$.

五、证明题 (本大题共 1 小题, 每小题 7 分, 共 7 分)

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 当 $x \in (a, b)$ 时, $|f'(x)| \leq M$. 且

$$\int_a^b f(x) dx = 0, \text{ 证明 } |f(a)| + |f(b)| \leq M(b-a) \text{ 成立.}$$

【证明】

因为 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 由积分中值定理可得, $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$ 成立, 所以

$$f(\xi) = 0. \text{ 所以 } |f(x)| = |f(x) - f(\xi)|. \text{ 由拉格朗日中值定理可得:}$$

$$f(x) - f(\xi) = f'(\eta)(x - \xi),$$

$$\text{所以 } |f(x)| = |f(x) - f(\xi)| = |f'(\eta)(x - \xi)| = |f'(\eta)| |x - \xi| \leq M |x - \xi|,$$

$$\text{所以 } |f(a)| \leq M |a - \xi| = M(\xi - a), \quad |f(b)| \leq M |b - \xi| = M(b - \xi)$$

$$\text{所以 } |f(a)| + |f(b)| \leq M(\xi - a) + M(b - \xi) = M(b - a)$$

16. 求微分方程 $4y'' - 12y' + 9y = 0$ 满足条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 的特解

17. 已知函数 $z = \sin(x^2 + y) + ye^{2x}$, 求全微分 dz

18. 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = x^2, y = 8x^2$ 与 $xy = 1$ 包围的闭区域.

19. 求由直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 曲线 $y = \sqrt{4 - x^2}$ 与 y 轴所包围成的闭图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) > 0, f(1) < 1$

证明: (1) 当 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $f(x_0) = x_0$

(2) 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $[3 - f'(\xi)]\xi = 2f(\xi)$



烟台大学统招专升本培训中心

高等数学 II

本试卷分为第 I 卷和第 II 卷两部分, 满分 100 分。考试用时 120 分钟。考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上, 并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。

2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号, 答在本试卷上无效。

3. 第 II 卷答题必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案; 不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

第 I 卷

一、单项选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其选出并将答题卡相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 下列函数是奇函数的是 ()

- A. e^x B. $x^2 + 1$
C. $\cos x$ D. $\sin x$

2. 已知函数 $f(x) = \frac{x+4}{x^2+4x}$ 则 $x = -4$ 函数是 $f(x)$ 的 ()

- A. 连续点 B. 可去间断点
C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点

3. 微分方程 $xy''' - x(y')^2 + 4 = 0$ 的阶数是 ()

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

4. 已知函数 $z = \arctan(xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ()

- A. $\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$ B. $\frac{1}{1+x^2y^2}$

C. $\frac{x^2y^2-1}{(1+x^2y^2)^2}$

D. $-\frac{1}{1+x^2y^2}$

5. 已知函数 $F(x) = \int_0^x e^{x^2+t^2} dx$ 则 $F'(x)$ ()

- A. $2xF(x) + e^{2x^2}$ B. $F(x) + e^{2x^2}$
C. $2e^{2x^2}$ D. e^{2x^2}

第 II 卷

二、填空题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 函数 $y = \sqrt{4-2x}$ 的定义域_____.

7. 曲线 $y = \ln(x^2+2)$ 在点 $(1, \ln 3)$ 处的切线斜率为_____.

8. 已知 $\int_a^b f(x)dx = 3$, $\int_a^b [2f(x) - 3g(x)]dx = 5$, 则 $\int_a^b g(x)dx =$ _____.

9. 函数 $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ 的极小值是_____.

10. 已知 $f(x) = 3x + \int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, 则 $\int_0^1 f(x)dx$ _____.

三、解答题(本大题共 8 小题, 每小题 7 分, 共 56 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2 + 3x} \right)$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2}$

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a + \ln(1+x), & x \geq 0 \\ bx, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 求实数 a 与 b 的值

14. $\int \frac{2x^3 - x + 3}{x^2} dx$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin 2x dx$

高等数学 II

本试卷分为第 I 卷和第 II 卷两部分，满分 100 分。考试用时 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1. 答题前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上，并将姓名、考生号、座号填（涂）在答题卡规定的位置。
2. 第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在本试卷上无效。
3. 第 II 卷答题必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

第 I 卷

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将答题卡相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 下列函数是奇函数的是（ ）

- A. e^x B. $x^2 + 1$
C. $\cos x$ D. $\sin x$

解析：D

2. 已知函数 $f(x) = \frac{x+4}{x^2+4x}$ 则 $x = -4$ 函数是 $f(x)$ 的（ ）

- A. 连续点 B. 可去间断点
C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点

解析：B

3. 微分方程 $xy''' - x(y')^2 + 4 = 0$ 的阶数是（ ）

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

解析：C

4. 已知函数 $z = \arctan(xy)$ ，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ （ ）

A. $\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$

B. $\frac{1}{1+x^2y^2}$

C. $\frac{x^2y^2-1}{(1+x^2y^2)^2}$

D. $-\frac{1}{1+x^2y^2}$

解析：A

5. 已知函数 $F(x) = \int_0^x e^{x^2+t^2} dx$ 则 $F'(x)$ （ ）

- A. $2xF(x) + e^{2x^2}$ B. $F(x) + e^{2x^2}$
C. $2e^{2x^2}$ D. e^{2x^2}

解析：A

第 II 卷

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 函数 $y = \sqrt{4-2x}$ 的定义域_____.

解析： $x \in (-\infty, 2]$

7. 曲线 $y = \ln(x^2 + 2)$ 在点 $(1, \ln 3)$ 处的切线斜率为_____.

解析： $y' = \frac{2x}{x^2+2}$ 将 $x=1$ 代入的 $y' = \frac{2}{3}$ 所得切线斜率为 $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + \ln 3$

8. 已知 $\int_a^b f(x)dx = 3$ ， $\int_a^b [2f(x) - 3g(x)]dx = 5$ ，则 $\int_a^b g(x)dx =$ _____.

解析： $\frac{1}{3}$

9. 函数 $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ 的极小值是_____.

解析： $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$ 解得 $x_1 = 1, x_2 = 0$

极小值 $f(x) = 1$

10. 已知 $f(x) = 3x + \int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$ ，则 $\int_0^1 f(x)dx$ _____.

解析: $-\frac{1}{2}$

三、解答题 (本大题共 8 小题, 每小题 7 分, 共 56 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2 + 3x} \right)$

解析: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2}$

解析: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(e^{\cos x - 1} - 1)}{x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{e}{2}$

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a + \ln(1+x), & x \geq 0 \\ bx, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 求实数 a 与 b 的值

解析: $f(0) = a, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, a = 0$
 $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
 $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{bx}{x} = b$
 $a = 0, b = 1$

14. $\int \frac{2x^3 - x + 3}{x^2} dx$

解析: $\int \left(2x - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx = x^2 - \ln x - \frac{3}{x} + c$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin 2x dx$

解析: $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin x d \sin x = 2 \int_0^1 te^t dt = \pi$

16. 求微分方程 $4y'' - 12y' + 9y = 0$ 满足条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 的特解

解析: 特征方程 $4r^2 - 12r + 9 = 0$

特征根 $r_1 = r_2 = \frac{3}{2}$

通解 $y = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{3}{2}x}$

$y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 解得 $c_1 = 1, c_2 = 2$

$y = (1 + 2x)e^{\frac{3}{2}x}$

17. 已知函数 $z = \sin(x^2 + y) + ye^{2x}$, 求全微分 dz

解析: $dz = (\cos(x^2 + y)2x + 2ye^{2x})dx + (\cos(x^2 + y) + e^{2x})dy$

18. 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = x^2, y = 8x^2$ 与 $xy = 1$ 包围的闭区域.

解析: $\iint_D y dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{8x^2} y dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} y dy = \int_0^1 \left(32x^4 - \frac{1}{2}x^4 \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}x^4 \right) dx$
 $= \left(32x^5 - \frac{1}{10}x^5 \right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{2x} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_1^2 = \frac{16}{5} - \frac{1}{4} = \frac{59}{20}$

19. 求由直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 曲线 $y = \sqrt{4 - x^2}$ 与 y 轴所包围成的闭图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积

解析: $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ y = \sqrt{4 - x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt{3} \end{cases}$

$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left[\left(\sqrt{4 - x^2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x \right)^2 \right] dx$
 $= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(4 - x^2 - \frac{1}{3}x^2 \right) dx$
 $= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(4 - \frac{4}{3}x^2 \right) dx$
 $= \pi \left(4x - \frac{4}{9}x^3 \right) \Big|_0^{\sqrt{3}}$
 $= \pi \left(4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{3} \right)$
 $= \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) > 0, f(1) < 1$

证明：(1) 当 $x_0 \in (0,1)$ 使得 $f(x_0) = x_0$

(2) 存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $[3 - f'(\xi)]\xi = 2f(\xi)$

解析：(1) 令 $F(x) = f(x) - x$

由题意的 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续

$$F(0) = f(0) > 0, F(1) = f(1) - 1 < 0$$

零点定理的，至少存在一个点 $\xi \in (0,1)$

使得 $F(x_0) = 0$ 即 $f(x_0) = x_0$

$$F(x) = x^2(f(x) - x)$$

$$(2) F(0) = 0$$

$$F(x_0) = 0$$

$$\exists \xi \in (0, x_0) \subset (0,1)$$

由罗尔定理可得

$$F'(\xi) = \xi[\xi(f'(\xi) - 3) + 2f(\xi)] = 0$$

即 $[3 - f'(\xi)]\xi = 2f(\xi)$ 成立



烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2022 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学 (II) 试题

本试卷共 3 页, 满分 100 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷和答题卡指定的位置, 并在答题卡指定位置中粘贴考生条形码。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 须用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。作答非选择题时, 须用 0.5 毫米黑伊签字笔将答案写在答题卡各题目指定区域内相应的位置。答在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其选出并将答题卡的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数不是 x 的等价无穷小的是

- A. $\ln(1+x)$ B. $\cos x$ C. $\tan x$ D. $\arctan x$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 3x} =$

- A. $-\frac{1}{3}$ B. 0 C. $\frac{1}{3}$ D. ∞

3. 函数 $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$ 的极小值点是

- A. $x = -1$ B. $x = 0$ C. $x = 1$ D. $x = 2$

4. 已知函数 $z = \ln(x+y)$, 则与其他三项不相等的选项是

- A. $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ B. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ C. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ D. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

5. 下列定积分最小的是

- A. $\int_0^1 \sin x^2 dx$ B. $\int_0^1 \tan x dx$ C. $\int_0^1 x dx$ D. $\int_0^1 x^2 dx$

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x-2|, & x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$, 则 $f[f(3)] =$ _____.

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin^2 x}{x^2}, & x < 0 \\ 2x^3 + 3, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

8. 已知函数 $y = e^{2x} + \cos(x+1)$, 则微分 $dy =$ _____.

9. 已知某产品的成本函数 $C(x) = 5 + 8\sqrt{x}$, 则产量 $x = 4$ 时的边际成本是 _____.

10. 已知函数 $f(x, y)$ 在 R^2 上连续 $I = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{(x-2)^2} f(x, y) dy$ 则交换积分次序后 $I =$ _____.

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 7 分, 共 56 分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$.

12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{-3x}$.

13. 求曲线 $y = e^{x^2} + x$ 在 $(0, 1)$ 处的切线方程.

14. 求不定积分 $\int (x \cos x + \sec^2 x) dx$.

15. 求定积分 $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$.

16. 求微分方程 $\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 的通解.

17. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $\sin(yz) = x^2 + z$ 确定的函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

18. 计算二重积分 $\iint_D (x^2 - 2y) dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = x^2$, $xy = 1$ 与直线 $x = 2$ 所围成的闭区域.

四、应用题 (本大题共 7 分)

19. 求曲线 $y = \sqrt{x}$ 与直线 $x + 3y = 4$, $x = 4$ 所围成的图形的面积.

五、证明题 (本大题共 7 分)

20. 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin 2x + 4 \tan x > 6x$.

山东省 2022 年普通高等教育专升本统一考试 高等数学 (II) 试题答案解析

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. (B)

解: A 选项中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; B 选项中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = \infty$; C 选项中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; D 选

项中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$, 因此答案选 B

2. (C)

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$, 因此答案选 C

3. (B)

解: $y' = 6x^2 + 6x$, 令 $y' = 0$ 得当 $x = 0$, $x = -1$. 进一步 $y'' = 12x + 6$, 且 $y''(0) = 6 > 0$,

$y''(-1) = -6 < 0$, 因此当 $x = 0$ 时取得极小值, 答案选 B

4. (A)

解: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 表示函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数, 而 $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ 表示 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的乘

积, 因此选 A

5. (A)

解: 当 $0 < x < 1$ 时, $\sin x^2 < x^2 < x < \tan x$, 根据定积分的保号性可知 $\int_0^1 \sin x^2 dx$ 的值最小,

因此答案选 A.

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 2

解: $f[f(3)] = f[0] = 2$

7. 3

解: 已知函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 进一步 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 又

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^3 + 3) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^2}{x^2} = a$, 因此 $a = 3$.

8. $[2e^{2x} + \sin(x+1)]dx$

解: $y' = 2e^{2x} + \sin(x+1)$, $dy = y'dx = [2e^{2x} + \sin(x+1)]dx$

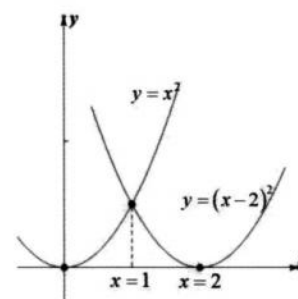
9. 2

解: 边际成本函数为 $C'(x) = (5 + 8\sqrt{x})' = \frac{4}{\sqrt{x}}$, 进一步 $C'(4) = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2$

10. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} f(x, y) dx$

解: 积分区域为 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$ 和

$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq (x-2)^2 \end{cases}$, 则积分区域如图



交换积分顺序后为 $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} f(x, y) dx$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 7 分, 共 56 分)

11. 解: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3)-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3} + 2)$$

$$= 4$$

$$12. \text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{-3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{-3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} \right]^{-6}$$

$$= e^{-6}$$

$$13. \text{解: } y' = 2xe^{x^2} + 1, \text{ 切线斜率为 } k = y'(0) = 1$$

所以, 切线方程为 $y - 1 = (x - 0)$, 即 $y = x + 1$

$$14. \text{解: } \int (x \cos x + \sec^2 x) dx$$

$$= \int x d(\sin x) + \int \sec^2 x dx$$

$$= x \sin x - \int \sin x dx + \tan x$$

$$= x \sin x + \cos x + \tan x + C$$

$$15. \text{解: 令 } \sqrt{x+1} = t, x = t^2 - 1, dx = 2t dt,$$

当 $x = 0$ 时, $t = 1$; 当 $x = 3$ 时, $t = 2$.

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} \cdot 2t dt$$

$$= \int_1^2 (2t^2 - 2) dt = \left(\frac{2}{3} t^3 - 2t \right) \Big|_1^2$$

$$= \frac{8}{3}$$

$$16. \text{解: 分离变量得, } \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx,$$

两边同时积分得到 $\arcsin y = \sqrt{x} + C$.

$$17. \text{解: (解法一) 设 } F(x, y) = \sin(yz) - x^2 - z,$$

$$F_x = -2x, F_y = z \cos(yz), F_z = y \cos(yz) - 1$$

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{2x}{y \cos(yz) - 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{z \cos(yz)}{1 - y \cos(yz)}$$

$$(\text{解法二}) \text{ 两边关于 } x \text{ 求导得 } y \frac{\partial z}{\partial x} \cos(yz) = 2x + \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\text{解得 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y \cos(yz) - 1}.$$

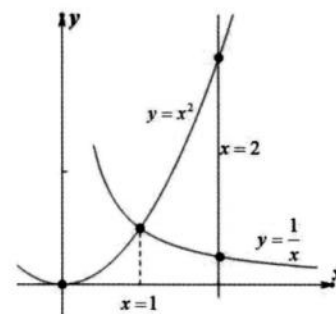
$$\text{两边关于 } y \text{ 求导得 } \left(z + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cos(yz) = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\text{解得 } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z \cos(yz)}{1 - y \cos(yz)}$$

$$18. \text{解: 由 } \begin{cases} y = x^2 \\ xy = 1 \end{cases} \text{ 得交点 } (1, 1)$$

$$\iint_D (x^2 - 2y) dx dy \\ = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} (x^2 - 2y) dy$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - x \right) dx \\ = -1$$

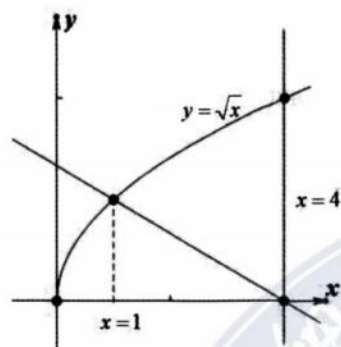


四、应用题（本大题共 1 小题，共 7 分）

19.解：所围区域如图所示

设所求图形面积为 S ，由 $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x + 3y = 4 \end{cases}$ 得交点 $(1, 1)$

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 \left[\sqrt{x} - \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right) \right] dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{3}x \right) \Big|_1^4 \\ &= \frac{19}{6} \end{aligned}$$



五、证明题（本大题共 1 小题，共 7 分）

20.证明：令 $f(x) = \sin 2x + 4 \tan x - 6x$ ，

$$\text{则 } f'(x) = 2 \cos 2x + 4 \sec^2 x - 6$$

$$= 4 \cos^2 x + \frac{4}{\cos^2 x} - 8 > 0$$

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，从而当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时， $f(x) > f(0) = 0$ ，

$$\text{即 } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \sin 2x + 4 \tan x > 6x$$

烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2021 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学 (II) 试题

本试卷分为第 I 卷和第 II 卷两部分, 共 3 页。满分 100 分。考试用时 120 分钟。考试结束后, 将本试卷和答题纸一并交回。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上, 并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。
2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号, 答在本试卷上无效。
3. 第 II 卷答题必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案; 不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

第 I 卷

一、单项选择题 (每题 3 分, 共 15 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其选出并将答题卡的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 已知函数 $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$, 则 $x=2$ 是 $f(x)$ 的 ()。
(A) 连续点 (B) 可去间断点 (C) 跳跃间断点 (D) 无穷间断点
2. 微分方程 $(y'')^2 + x^2 y' + y^3 = 0$ 的阶数是 ()。
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
3. 曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 3$ 的拐点是 ()。
(A) $(-1, -1)$ (B) $(0, 3)$ (C) $(1, 1)$ (D) $(2, -1)$

4. 已知函数 $z = \frac{\sin(xy)}{y}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ()$.

- (A) $-x \sin(xy)$ (B) $x \sin(xy)$ (C) $-x \cos(xy)$ (D) $x \cos(xy)$

5. 已知 $f(x)$ 为 $[1, +\infty)$ 上的连续函数, 且 $F(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt, x \in [1, +\infty)$, 则 $F'(x) = ()$.

- (A) $2f(x)$ (B) $2xf(x^2)$ (C) $\frac{f(x^2)}{x^2}$ (D) $\frac{2f(x^2)}{x}$

第 II 卷

二、填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + 2b_n) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x} \right)^x = 2$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 曲线 $xy + \ln y - 1 = 0$ 在点 $(1, 1)$ 处的法线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 直线 $x=4, y=0$ 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 所围成的图形的面积 $S = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 已知函数 $f(x, y)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续. 设 $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$, 则交换积分次序后 $I = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题 (每小题 7 分, 共 56 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x-1} - x \right)$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \tan x}$.

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{\sqrt{1+x}-1}, & x > 0 \\ 2b+1, & x = 0 \\ b+2\cos x, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求实数 a 与 b 的值.

4. 求不定积分 $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{1+4\sin^2 x} dx$.

5. 求定积分 $\int_1^5 e^{\sqrt{2x-1}} dx$.

6. 求微分方程 $2ydy - (1+\cos x)(1+y^2)dx = 0$ 满足初值条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解.

7. 求函数 $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 3xy + \frac{3}{2}y^2$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值.

8. 计算二重积分 $\iint_D (x+2y) dx dy$, 其中 D 是由直线 $y=x$, $y=4x$ 与曲线 $xy=1$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

烟台大学统招专升本培训中心

四、应用题（共 7 分）

生产某种设备的固定成本为 1000 万元，每生产一台设备，成本增加 20 万元．已知需求价格函数为 $P(Q) = 200 - Q$ ．问销售量 Q 为多少时，总利润 L 达到最大？最大利润是多少？

五、证明题（共 7 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0) = 0$ ．证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f(\xi) = f'(\xi)\tan(1 - \xi)$ ．



烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2021 年普通高等教育专升本统一考试 高等数学 (II) 试题答案解析

一、单项选择题

1. (D)

解: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2-4} = \infty$, 极限为无穷大的间断点为无穷间断点, 答案选 (D).

2. (B)

解: 微分方程中未知函数的导数的最高阶称为微分方程的阶, 原微分方程中最高阶为 y'' , 因此是二阶微分方程, 答案选 (B).

3. (C)

解: $y = x^3 - 3x^2 + 3$, $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$, 则当 $x = 1$ 时 $y'' = 0$, 且在 $x = 1$ 的左右两侧异号, 因此在 $x = 1$ 处取得拐点为 $(1, 1)$, 答案选 (C).

4. (A)

解: $z = \frac{\sin(xy)}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos(xy)}{y} \cdot y = \cos(xy)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = (\cos(xy))' = -x \sin(xy)$, 答案选 (A).

5. (D)

解: 根据变限积分求导公式可知 $F'(x) = \left(\int_1^{x^2} \frac{f(t)}{t} dt \right)' = \frac{f(x^2)}{x^2} \cdot 2x = \frac{2f(x^2)}{x}$, 答案选 (D).

二、填空题

1. 5

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + 2b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^2 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1^2 + 2 \cdot 2 = 5$.

2. $-\ln 2$

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-a}{x} \right)^{\frac{x}{-a}} \right]^{-a} = e^{-a} = 2$, 因此 $-a = \ln 2$, 所以 $a = -\ln 2$.

3. $2x - y - 1 = 0$

解: 令 $F(x, y) = xy + \ln y - 1$, 则 $y'(1) = -\frac{F_x}{F_y} \Big|_{(1,1)} = -\frac{y}{x + \frac{1}{y}} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{2}$, 因此法线方

程为 $y - 1 = -\frac{1}{-\frac{1}{2}}(x - 1)$, 整理可得 $2x - y - 1 = 0$.

4. $\frac{16}{3}$

解: 所围面积如图所示.

所求面积为

$$S = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} (8 - 0) = \frac{16}{3}.$$

5. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$

解: 积分区域为 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 1 \leq x \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{2-x^2} \end{cases}$, 区域如图所示.

$y = 1 - \sqrt{1-x^2}$ 化为 $x = \sqrt{2y-y^2}$,

$y = \sqrt{2-x^2}$ 化为 $x = \sqrt{2-y^2}$

因此积分化为 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$.

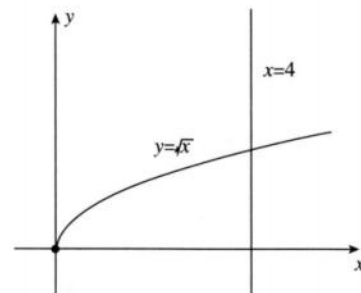
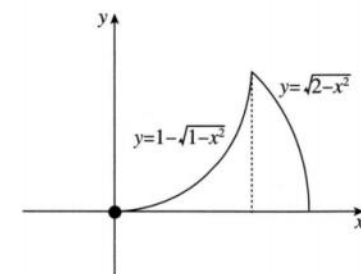
三、计算题

1. 解: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$.

2. 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \sec^2 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{-\tan^2 x}$$

$$= -3.$$



3. 解: 由已知, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{\sqrt{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax(\sqrt{1+x} + 1)}{x} = 2a$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (b + 2\cos x) = b + 2.$$

又因为函数在 $x=0$ 处连续, 且 $f(0)=2b+1$,

$$\text{所以 } 2a = 2b + 1 = b + 2,$$

$$\text{解得: } a = \frac{3}{2}, b = 1.$$

4. 解: $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{1 + 4 \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{1 + 4 \sin^2 x} d\sin x \stackrel{u = \sin x}{=} \int \frac{u^2}{1 + 4u^2} du$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1 + 4u^2}{1 + 4u^2} - \frac{1}{1 + 4u^2} \right) du$$

$$= \frac{1}{4} \left[\int 1 du - \int \frac{1}{1 + 4u^2} du \right]$$

$$= \frac{1}{4} u - \frac{1}{8} \arctan(2u) + C$$

$$= \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{8} \arctan(2 \sin x) + C.$$

5. 解: 令 $\sqrt{2x-1} = t$, 则 $x = \frac{1+t^2}{2}$ 时, $dx = t dt$.

当 $x=1$ 时, $t=1$; 当 $x=5$ 时, $t=3$.

$$\int_1^5 e^{\sqrt{2x-1}} dx = \int_1^3 t e^t dt$$

$$= t e^t \Big|_1^3 - \int_1^3 e^t dt$$

$$= 3e^3 - e - e^t \Big|_1^3$$

$$= 2e^3.$$

6. 解: 分离变量得 $\frac{2y}{1+y^2} dy = (1 + \cos x) dx$,

$$\text{两边积分得方程通解 } \ln(1+y^2) = x + \sin x + C.$$

把初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入得 $C=0$. 所以, 所求初值问题的解为 $\ln(1+y^2) = x + \sin x$.

7. 解: 解方程组

$$\begin{cases} f_x = x^2 + 2 - 3y = 0, \\ f_y = -3x + 3y = 0, \end{cases}$$

得驻点 $(1, 1)$ 和 $(2, 2)$. 再求二阶偏导数得

$$f_{xx} = 2x, f_{xy} = -3, f_{yy} = 3.$$

在 $(1, 1)$ 处, 因为 $AC - B^2 = 6 - 9 = -3 < 0$, 所以在 $(1, 1)$ 处不取极值.

在 $(2, 2)$ 处, 因为 $AC - B^2 = 12 - 9 = 3 > 0$, 且 $A = 4 > 0$, 所以在 $(2, 2)$ 处取得极小值

$$f(2, 2) = \frac{2}{3}.$$

8. 解: 由 $\begin{cases} xy = 1 \\ y = x \end{cases}$, 得交点 $(1, 1)$; 由 $\begin{cases} xy = 1 \\ y = 4x \end{cases}$, 得交点 $(\frac{1}{2}, 2)$.

$$\iint_D (x+2y) dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_x^{4x} (x+2y) dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_x^{\frac{1}{x}} (x+2y) dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 18x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 - 2x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= 6x^3 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \left(x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{x} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{5}{3}.$$

四、应用题

解: 由题意可得设备生产的成本函数为 $C(Q) = 1000 + 20Q$.

根据市场需求得收益函数为 $R(Q) = Q \cdot P(Q) = 200Q - Q^2$.

因此该设备生产的总利润函数为 $L(Q) = R(Q) - C(Q) = 180Q - Q^2 - 1000$.

因此 $L'(Q) = 180 - 2Q$, 令 $L'(Q) = 0$ 得唯一驻点 $Q = 90$. 又因为 $L''(Q) = -2 < 0$,

所以 $Q = 90$ 是总利润的极大值点, 从而也是最大值点.

所以当 $Q = 90$ (台) 时, 总利润最大.

最大利润为 $L(Q)|_{Q=90} = 7100$ (万元).

五、证明题

证明: 令 $F(x) = f(x) \sin(1-x)$, $x \in [0, 1]$.

由 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 可知 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导,

$$F'(x) = f'(x) \sin(1-x) - f(x) \cos(1-x),$$

$$\text{且 } F(0) = f(0) \sin 1 = 0, F(1) = f(1) \sin 0 = 0.$$

由罗尔定理可知, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$,

$$\text{即 } f(\xi) = f'(\xi) \tan(1-\xi), \xi \in (0, 1).$$

山东省 2020 年普通高等教育专升本统一考试 高等数学 (II) 试题

本试卷分为第 I 卷和第 II 卷两部分, 共 4 页。满分 100 分。考试用时 120 分钟。考试结束后, 将本试卷和答题纸一并交回。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上, 并将姓名、考生号、座号填 (涂) 在答题卡规定的位置。
2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号, 答在本试卷上无效。
3. 第 II 卷答题必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案; 不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

第 I 卷

一、单项选择题 (每题 3 分, 共 15 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其选出并将答题卡的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 以下函数是无穷小量的是 () .
(A) $x^2 + 1$ (B) $\sqrt{x+1}$ (C) $\sin x$ (D) $\cos x$
2. 以直线 $y=0$ 为水平渐近线的曲线是 () .
(A) $y=e^x$ (B) $y=\ln x$ (C) $y=\tan x$ (D) $y=x^3$
3. 若 $\int_a^b f(x)dx=2$, $\int_a^b g(x)dx=1$, 则 $\int_a^b [3f(x)-2g(x)]dx=()$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + \sin x}{e^y}$ 的通解是 () .

(A) $e^y = x^2 + \cos x + C$. (B) $e^y = x^2 - \cos x + C$
(C) $e^y = x^2 + \sin x + C$. (D) $e^y = x^2 - \sin x + C$.

5. 已知函数 $f(x, y)$ 在 R^2 上连续, 设 $I = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{3-2y} f(x, y)dx$, 则交换积分次序后 $I =$ () .

(A) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y)dy$
(B) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{3-2x} f(x, y)dy$
(C) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{3-2x} f(x, y)dy$
(D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y)dy$

第 II 卷

二、填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ 的定义域是 _____.
2. 已知函数 $f(x) = x^3 + 3x - 2$, $g(x) = \tan x$, 则 $f\left[g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] =$ _____.
3. 曲线 $y = 2x + \ln x$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线的斜率 $k =$ _____.
4. 曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $x=1$, $x=3$ 及 x 轴所围成的图形的面积 $S =$ _____.
5. 已知函数 $z = x^2 \arctan(2y)$, 则全微分 $dz =$ _____.

三、计算题 (每题 7 分, 共 56 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{x - 2} \right)$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$.

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - b, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ ae^x + b, & x < 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续, 求实数 a 与 b 的值.

4. 求不定积分 $\int \frac{1 + \ln x}{x} dx$.

5. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - 1) \cos x dx$.

6. 求微分方程 $y' + y = e^x + 1$ 的通解.

7. 已知函数 $z = x \sin \frac{y}{x}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

8. 计算二重积分 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x$, $y = 5x$ 及 $y = -x + 6$ 所围成的闭区域.

四、应用题 (每题 7 分, 共 7 分)

假设某产品的市场需求量 Q (单位: 吨) 与销售价格 p (单位: 万元) 的关系为 $Q(p) = 45 - 3p$, 其总成本函数为 $C(Q) = 20 + 3Q$. 问 p 为何值时利润最大? 最大利润是多少?

五、证明题 (每题 7 分, 共 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, 在 $(1, 2)$ 内可导, 且 $f(1) = 4f(2)$. 证明: 存在 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2020 年普通高等教育专升本统一考试 高等数学 (II) 试题答案解析

一、单项选择题

1. (C)

解: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1, \text{ 而 } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \text{ 答案选 (C).}$$

2. (A)

解: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, 则称 $y = a$ 为函数 $f(x)$ 的水平渐近线. 结合函数图形以及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan x$ 极限不存在, 只有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, 因此 $y = 0$ 为函数 $y = e^x$ 的水平渐近线. 答案选 (A).

3. (D)

解: 由题意可知, $\int_a^b [3f(x) - 2g(x)] dx = 3 \int_a^b f(x) dx - 2 \int_a^b g(x) dx = 4$, 答案选 (D).

4. (B)

解: 原方程为可分离变量微分方程, 因此方程化为 $e^y dy = (2x + \sin x) dx$, 两边同时积分得,

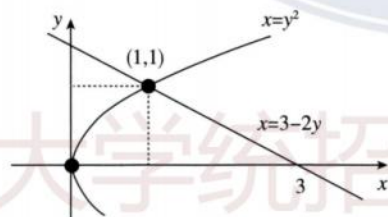
$$\int e^y dy = \int (2x + \sin x) dx, \text{ 整理得 } e^y = x^2 - \cos x + C, \text{ 答案选 (B).}$$

5. (D)

解: 积分区域如图所示, 看成 X 型则积分区域写成

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}, \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq \frac{3-x}{2} \end{cases}, \text{ 因此积分化为}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy, \text{ 答案选 (D).}$$



二、填空题

1. $(3, +\infty)$

解: 由题意可知, 函数的定义域满足 $x-3 > 0$, 解得 $x > 3$, 因此函数的定义域为 $(3, +\infty)$.

2. 2

$$\text{解: } g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1, f\left(g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = f(1) = 1 + 3 - 2 = 2.$$

3. 3

解: 由导数的几何意义可知, 切线的斜率等于函数在该点的导数值, 因此

$$k = y'(1) = \left(2x + \frac{1}{x}\right)_{x=1} = 3.$$

4. $\ln 3$

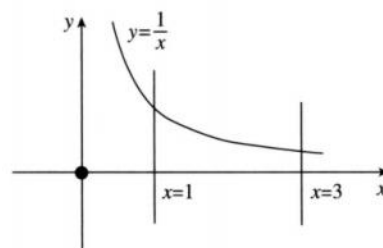
解: 所求区域如图所示,

$$\text{面积 } S = \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln 3.$$

5. $2x \arctan(2y) dx + \frac{2x^2}{1+4y^2} dy$

$$\text{解: } \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \arctan(2y), \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2}{1+4y^2},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2x \arctan(2y) dx + \frac{2x^2}{1+4y^2} dy.$$



三、计算题

$$\begin{aligned} 1. \text{ 解: } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{x - 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{(x - 2)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{1 - x} \\ &= -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ 解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3. 解: 由已知, $f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - b) = -b$,

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ae^x + b) = a + b.$$

因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $f(0)=1$,

$$\text{所以 } \begin{cases} -b=1, \\ a+b=1. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=2, \\ b=-1. \end{cases}$$

4. 解: $\int \frac{1+\ln x}{x} dx$

$$= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$= \ln x + \int \ln x d \ln x$$

$$= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + \ln x + C.$$

5. 解: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) d \sin x$

$$= (x-1) \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2.$$

6. 解: 此方程为一阶非齐次线性微分方程, 其中 $P(x)=1$, $Q(x)=e^x+1$. 由公式得通解为

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right)$$

$$= e^{-\int dx} \left[\int (e^x + 1) e^{\int dx} dx + C \right]$$

$$= e^{-x} \left[\int (e^x + 1) e^x dx + C \right]$$

$$= e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} + e^x + C \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^x + C e^{-x} + 1, C \in \mathbf{R}.$$

7. 解: $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin \frac{y}{x} + x \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) \cos \frac{y}{x}$

$$= \sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} \sin \frac{y}{x}$$

$$= \frac{y}{x^2} \sin \frac{y}{x}.$$

8. 解: 直线 $y=x$ 和 $y=-x+6$ 的交点为 $(3, 3)$,

直线 $y=5x$ 和 $y=-x+6$ 的交点为 $(1, 5)$,

$$\text{则 } \iint_D xy dx dy = \int_0^1 dx \int_x^{5x} xy dy + \int_1^3 dx \int_x^{6-x} xy dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x}{2} y^2 \right]_x^{5x} dx + \int_1^3 \left[\frac{x}{2} y^2 \right]_x^{6-x} dx$$

$$= \int_0^1 12x^3 dx + \int_1^3 (18x - 6x^2) dx = 23.$$

四、应用题

解: 由题意, 利润函数为:

$$L(p) = pQ - C(Q) = -3p^2 + 54p - 155.$$

$$\frac{dL}{dp} = -6p + 54, \text{ 令 } \frac{dL}{dp} = 0, \text{ 得 } p = 9.$$

因为 $\frac{d^2 L}{dp^2} = -6 < 0$, 所以销售价格 $p=9$ (万元) 时利润最大.

最大利润为 $L(9) = 88$ (万元).

五、证明题

证明: 令 $F(x) = x^2 f(x)$, $x \in [1, 2]$.

易知 $F(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, 在 $(1, 2)$ 内可导, 且有 $F'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$.

因为 $F(1) = f(1)$, $F(2) = 4f(2)$, 所以 $F(1) = F(2)$.

由罗尔定理, 存在 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 0$.

又因为 $\xi \neq 0$, 所以 $2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.