山东省 2026 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学I

本试题分为第I卷和第II卷两部分，满分 100 分，考试用时 120 分钟。考试结束后，将本试题和答题卡一并交回。

注意事项:

1.答题前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上，并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。

2.第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在本试卷上无效。

3.第 II 卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置；如需改动，先划掉原来的答案，再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带,不按以上要求作答的答案无效。

第I卷

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将答题卡的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1.当 $x\to 0$ 时，以下函数是无穷小的是（　　）

A. x^2　　B. $\cos x$　　C. $\sqrt{1-x}$　　D. e^x

2. $x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}2+\sin x, & x>0\\ 3, & x=0\\ x^2+x+2, & x<0\end{cases}$ 的（　　）

A.连续点　　B.可去间断点　　C.跳跃间断点　　D.无穷间断点

3.以下是二阶微分方程的是（　　）

A. $xy'+y^2+x^2=0$　　B. $y=(y')^2+2yy'+x^2=0$

C. $(y''')^2+xy''-3y'=0$　　D. $y''-x^2y'+xy^2=0$

4.已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^x(y-1)+\arctan(xy)=0$ 所确定，则 $y'(0)=$（　　）

A. -2　　B. 2　　C. -1　　D. 1

5.以下级数收敛的是（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2(n+1)}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5^n}{n!}$

第II卷

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6.已知函数 $f(x)=\frac{x+6}{x+1}$，则 $f^{-1}(3)=$_____.

7.已知两向量 $\vec{a}=(-1,k,1)$，和 $\vec{b}=(1,-2,k)$ 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$，则 $k=$_____.

8.已知函数 $z=\tan(2x+y^2)$，则全微分 $dz=$_____.

9.已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+4)^n$ 在 $x=-7$ 处收敛，在 $x=-1$ 处发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(2x-7)^n$ 的收敛域为_____.

10.已知函数 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt$，则 $\int_1^3(2x-3)f(x)dx=$_____.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11.求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+1}\right)^x$.

12.求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\cos x-2}{x^4(1+x)}$.

13.求不定积分 $\int\frac{5x+6}{x^2+3x}dx$.

14.求定积分 $\int_0^{\sqrt{2}}(x^3+2x)e^{x^2}dx$.

15.求曲线 $y=x+\ln x$ 通过点 $(0,1)$ 的切线方程.

烟台大学统招专升本培训中心

16.求平面 $2x+3y+5z+1=0$ 内过点 $(0,-2,1)$ 且垂直于直线 $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{-2}$ 的直线方程.

17.求微分方程 $y'+y\sin x=\sin x+e^{\cos x}$ 的通解.

18.计算二重积分 $\iint_D (x-y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid (x-2)^2+(y-2)^2=8, y\geq x\}$.

四、应用题（本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

19.求函数 $f(x,y)=2x^3-12xy+3y^2+6x+6y$ 的极值，并判断是极大值还是极小值.

20.求由曲线 $y=-x^2+2|x|+3$ 与直线 $y=x+3$ 所围成的图形的面积.

五、证明题（本大题共 1 小题，每小题 8 分，共 8 分）

21.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=1$，证明：$\forall x\in[0,1]$，有

$$f(x)\geq 1-\frac{1}{4}\int_0^1 |f''(x)|dx.$$

烟台大学统招专升本培训中心

班级_____ 姓名_____ 座位号_____ 学号_____ 考场号_____

密 封 线

线 封 密
学号 姓名 座位号 考场号 班级

山东省2026年普通高等教育专升本统一考试

高等数学I

本试题分为第I卷和第II卷两部分，满分 100 分，考试用时 120 分钟。考试结束后，将本试题和答题卡一并交回。

注意事项:

1.答题前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上，并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。

2.第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在本试卷上无效。

3.第 II 卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置；如需改动，先划掉原来的答案，再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带,不按以上要求作答的答案无效。

第I卷

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将答题卡的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1.当 $x\to 0$ 时，以下函数是无穷小的是（　　）

A. x^2　　B. $\cos x$　　C. $\sqrt{1-x}$　　D. e^x

【答案】A

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$,故选 A

2. $x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}2+\sin x, & x>0\\ 3, & x=0\\ x^2+x+2, & x<0\end{cases}$ 的（　　）

A.连续点　　B.可去间断点　　C.跳跃间断点　　D.无穷间断点

【答案】B

【解析】

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2\sin x=2$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+x+2)=2$, $f(0)=3$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq f(0)$,因此为可去间断点，故选 B

3.以下是二阶微分方程的是（　　）

A. $xy'+y^2+x^2=0$　　B. $y=(y')^2+2yy'+x^2=0$

C. $(y''')^2+xy''-3y'=0$　　D. $y''-x^2y'+xy^2=0$

【答案】D

4.已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^x(y-1)+\arctan(xy)=0$ 所确定，则 $y'(0)=$（　　）

A. -2　　B. 2　　C. -1　　D. 1

【答案】C

【解析】将 $x=0$ 带入 $e^x(y-1)+\arctan(xy)=0$ 可得 $y=1$，原式求导为

$e^x(y-1)+e^x\cdot y'+\dfrac{y+xy'}{1+x^2y^2}=0$，将 $x=0$，$y=1$ 代入一阶导可得 $y'(0)=-1$

5.以下级数收敛的是（　　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{\ln n}}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2(n+1)}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+5^n}{n!}$

【答案】D

【解析】将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+5^n}{n!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n!}$，分别用比值判别法判定

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0<1$，收敛；$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n+1}=0<1$，收敛，收敛加收敛为收敛.

第II卷

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6.已知函数 $f(x)=\dfrac{x+6}{x+1}$，则 $f^{-1}(3)=$_____.

【答案】$\dfrac{3}{2}$

烟台大学统招专升本培训中心

【解析】令 $y=\dfrac{x+6}{x+1}$，则 $x=\dfrac{6-y}{y-1}$，即 $f^{-1}(x)=\dfrac{6-x}{x-1}$，则 $f^{-1}(3)=\dfrac{6-3}{3-1}=\dfrac{3}{2}$

7.已知两向量 $\vec{a}=(-1,k,1)$，和 $\vec{b}=(1,-2,k)$ 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$，则 $k=$_____.

【答案】-6

【解析】由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ 可知 $-1-2k+k=5$，则 $k=-6$

8.已知函数 $z=\tan\left(2x+y^2\right)$，则全微分 $dz=$_____.

【答案】$dz=2\sec^2\left(2x+y^2\right)dx+2y\sec^2\left(2x+y^2\right)dy$

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2\sec^2\left(2x+y^2\right)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y\sec^2\left(2x+y^2\right)$ 则

$dz=2\sec^2\left(2x+y^2\right)dx+2y\sec^2\left(2x+y^2\right)dy$

9.已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+4)^n$ 在 $x=-7$ 处收敛，在 $x=-1$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(2x-1)^n$ 的收敛域为_____.

【答案】$[-1,2)$

【解析】$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+4)^n$ 的收敛域是 $[-7,-1)$，$x+4\in[-3,3)$，$2x-1\in[-3,3)$，$\therefore x\in[-1,2)$ 即

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(2x-1)^n$ 的收敛域为 $[-1,2)$.

10.已知函数 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(t+1)}{t}dt$，则 $\int_1^3(2x-3)f(x)dx=$_____.

【答案】$10\ln 2-5$

【解析】$f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$，$f(1)=0$

$\int_1^3(2x-3)f(x)dx=\int_1^3 f(x)d\left(x^2-3x\right)=\left[\left(x^2-3x\right)f(x)\right]_1^3-\int_1^3\left(x^2-3x\right)df(x)$

$=-\int_1^3\left(x^2-3x\right)\dfrac{\ln(x+1)}{x}dx=-\int_1^3(x-3)\ln(x+1)dx=-\int_1^3\ln(x+1)d\left(\dfrac{1}{2}x^2-3x\right)$

$=-\left[\ln(x+1)\left(\dfrac{1}{2}x^2-3x\right)\right]_1^3+\int_1^3\left(\dfrac{1}{2}x^2-3x\right)\dfrac{1}{x+1}dx=10\ln 2-5$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11.求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x^2+1}\right)^x$.

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x^2+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\left(\frac{x^2+2x}{x^2+1}-1\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\cdot\frac{2x-1}{x^2+1}}=e^2$

12.求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2\cos x-2}{x^4(1+x)}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2\cos x-2}{x^4(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{x^2+2\cos x-2}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2\cos x-2}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-2\sin x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{6x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{12x}=\dfrac{1}{12}$

13.求不定积分 $\int\dfrac{5x+6}{x^2+3x}dx$.

【解析】$\int\dfrac{5x+6}{x^2+3x}dx=\int\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x+3}\right)dx=2\ln|x|+\ln|x+3|+C$

14.求定积分 $\int_0^{\sqrt{2}}\left(x^3+2x\right)e^{x^2}dx$.

【解析】$\int_0^{\sqrt{2}}\left(x^3+2x\right)e^{x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}}\left(x^2+2\right)e^{x^2}dx^2$，令 $t=x^2$ 则

原式 $=\dfrac{1}{2}\int_0^2(t+2)e^t dt=\dfrac{1}{2}\int_0^2(t+2)de^t=\dfrac{1}{2}\left[(t+2)e^t\right]_0^2-\dfrac{1}{2}\int_0^2 e^t dt$

$=\dfrac{1}{2}\left[(t+2)e^t\right]_0^2-\dfrac{1}{2}\left[e^t\right]_0^2=\dfrac{1}{2}\left(3e^2-1\right)$

烟台大学统招专升本培训中心

考场号_____ 座位号_____ 班级_____
学号_____ 姓名_____
密 封 线

15.求曲线 $y=x+\ln x$ 通过点 $(0,1)$ 的切线方程.

【解析】设切点坐标 $(x_0,x_0+\ln x_0)$，$y'=1+\dfrac{1}{x}$，则切线斜率为 $k=1+\dfrac{1}{x_0}$，则切线方程为

$y-(x_0+\ln x_0)=\left(1+\dfrac{1}{x_0}\right)(x-x_0)$，将 $(0,1)$ 代入求得 $x_0=e^2$，所以切线方程为

$$y=\left(1+\frac{1}{e^2}\right)x+1$$

16.求平面 $2x+3y+5z+1=0$ 内过点 $(0,-2,1)$ 且垂直于直线 $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{-2}$ 的直线方程.

【解析】设所求平面的方向向量为 $\vec{l}_1$，由题意得平面的法向量为 $\vec{n}=(2,3,5)$，已知直线方程方向向量为 $\vec{l}=(3,1,-2)$，则 $\vec{l}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&5\\3&1&-2\end{vmatrix}=(-11,19,-7)$，直线方程为 $\dfrac{x}{-11}=\dfrac{y+2}{19}=\dfrac{z-1}{-7}$

17.求微分方程 $y'+y\sin x=\sin x+e^{\cos x}$ 的通解.

【解析】 $y=e^{-\int\sin x dx}\left[\int(\sin x+e^{\cos x})e^{\int\sin x dx}dx+C\right]=e^{\cos x}\left[\int(\sin x+e^{\cos x})e^{-\cos x}dx+C\right]$

$=e^{\cos x}\left[\int(e^{-\cos x}\sin x+1)dx+C\right]=e^{\cos x}(e^{-\cos x}+x+C)=1+xe^{\cos x}+Ce^{\cos x}$

18.计算二重积分 $\iint\limits_D(x-y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,(x-2)^2+(y-2)^2=8,y\geq x\}$.

【解析】 $\iint\limits_D(x-y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{4(\sin\theta+\cos\theta)}(r\cos\theta-r\sin\theta)rdr$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left[\frac{1}{3}r^3(\cos\theta-\sin\theta)\right]_0^{4(\sin\theta+\cos\theta)}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{64}{3}(\cos\theta+\sin\theta)^3(\cos\theta-\sin\theta)d\theta$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{64}{3}(\cos\theta+\sin\theta)^3d(\cos\theta+\sin\theta)=\frac{64}{3}\cdot\frac{1}{4}\left[(\cos\theta+\sin\theta)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{3\pi}{4}}=-\frac{64}{3}$

四、应用题（本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

19.求函数 $f(x,y)=2x^3-12xy+3y^2+6x+6y$ 的极值，并判断是极大值还是极小值.

【解析】先求一阶偏导 $\begin{cases}f_x=6x^2-12y+6\\f_y=-12x+6y+6\end{cases}$，令一阶偏导等于零求驻点，令 $\begin{cases}6x^2-12y+6=0\\-12x+6y+6=0\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$，求二阶偏导 $\begin{cases}f_{xx}=12x\\f_{xy}=-12\\f_{yy}=6\end{cases}$，

将 $(1,1)$ 代入二阶偏导计算 $\begin{cases}A=12\\B=-12\\C=6\end{cases}$，则 $AC-B^2=-72<0$，$(1,1)$ 不是极值点

将 $(3,5)$ 代入二阶偏导计算 $\begin{cases}A=36\\B=-12\\C=6\end{cases}$，则 $AC-B^2=72>0$，且 $A>0\therefore(3,5)$ 是极小值点，

极小值为 $f(3,5)=-3$

20.求由曲线 $y=-x^2+2|x|+3$ 与直线 $y=x+3$ 所围成的图形的面积.

【解析】二者围城的封闭图形共两部分，

面积 $=\int_{-3}^{0}\left[(-x^2-2x+3)-(x+3)\right]dx+\int_0^1\left[(-x^2+2x+3)-(x+3)\right]dx$

$=\int_{-3}^{0}(-x^2-3x)dx+\int_0^1(-x^2+x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{9}{2}+\frac{1}{6}=\frac{14}{3}$

烟台大学统招专升本培训中心

考场号 座位号 学号 姓名 班级 密 封 线

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 座位号_____ 考场号_____
密 封 线

五、证明题（本大题共 1 小题，每小题 8 分，共 8 分）

21.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=1$，证明：$\forall x\in[0,1]$，有

$$f(x)\geq 1-\frac{1}{4}\int_0^1|f''(x)|dx.$$

证明：

当 $x=0$ 和 $x=1$ 时，不等式恒成立；

当 $x\in(0,1)$ 时，因为二阶可导，所以由拉氏中值定理可得：

$\exists\xi_1\in(0,x)$，使得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{f(x)-1}{x}$；

$\exists\xi_2\in(x,1)$，使得 $f'(\xi_2)=\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}=\dfrac{1-f(x)}{1-x}$；

化简不等式（放缩），放缩的思路是要将绝对值拿出来

$$\frac{1}{4}\int_0^1|f''(x)|dx\geq\frac{1}{4}\int_{\xi_1}^{\xi_2}|f''(x)|dx\geq\frac{1}{4}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)dx\right|=\frac{1}{4}|f'(\xi_2)-f'(\xi_2)|=\frac{1}{4}\left|\frac{1-f(x)}{1-x}-\frac{f(x)-1}{x}\right|$$

$$=\frac{1}{4}|f(x)-1|\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\right)$$

令 $g(x)=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{x}$，求 $x\in(0,1)$ 上的最小值，利用求导的方法，$g'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}-\dfrac{1}{x^2}$，令

$g'(x)=0$，解得驻点 $x=\dfrac{1}{2}$，是极小值点也是最小值点，$g(x)\geq g\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$，所以

原式 $\geq\dfrac{1}{4}|f(x)-1|\times 4=|f(x)-1|\geq 1-f(x)$，即 $f(x)\geq 1-\dfrac{1}{4}\int_0^1|f''(x)|dx$，得证.

烟台大学统招专升本培训中心

姓名 班级 座号 准考证号 密 封 线

山东省2025年普通高等教育专升本

统一考试

高等数学（一）

本试卷分为第 I 卷和第 II 卷两部分。满分 100 分，考试时间 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1.答题前，考生务必用 0.5 毫米黑签色字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上，并将姓名、考生号、座号填(涂)在答题卡规定的位置。

2.第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 笔把答题卡上对应题目的答标号涂黑如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在本试卷上无效。

3.第 II 卷答题必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案;不能使用涂改液、胶带纸修正带。不按以上要求作答的答案无效。

第 I 卷

一、单项选择题（本大题共5小题，每题3分，共15分）

1 下列函数是周期函数的是（ ）

$A\quad x^2\quad B\quad e^x\quad C\quad \cos x\quad D\quad \ln(1+x^2)$

2 已知函数$y=\dfrac{x+3}{2x-4}$,则函数的水平渐近线为（ ）

$A\quad y=\dfrac{1}{2}\quad B\quad y=-\dfrac{1}{2}\quad C\quad y=2\quad D\quad y=-3$

3 曲线方程$\begin{cases}x=t+\sin t\\ y=t^3+e^t\end{cases}$，则曲线在$t=0$处的切线斜率为（ ）

$A\quad -\dfrac{1}{2}\quad B\quad \dfrac{1}{2}\quad C\quad -2\quad D\quad 2$

4 微分方程$y''-6y'+34y=0$的通解为（ ）

$A\quad y=e^{5x}(c_1\sin 3x+c_2\cos 5x)\quad B\quad y=e^{3x}(c_1\sin 5x+c_2\cos 5x)$

$C\quad y=e^{5x}(c_1\sin 3x+c_2\cos 3x)\quad D\quad y=e^{3x}(c_1\sin 5x+c_2\cos 3x)$

5 已知$z=\arcsin(x-2y)$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（ ）

$A\quad \dfrac{-2(x-2y)}{[1-(x-2y)^2]^{\frac{3}{2}}}\quad B\quad \dfrac{2(x-2y)}{[1-(x-2y)^2]^{\frac{3}{2}}}\quad C\quad \dfrac{-(x-2y)}{[1-(x-2y)^2]^{\frac{3}{2}}}\quad D\quad \dfrac{(x-2y)}{[1-(x-2y)^2]^{\frac{3}{2}}}$

第II卷

二、填空题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

6 已知$f(x)=\begin{cases}x^2+3, x\le 1\\ 2^{x-1}, x>1\end{cases}$,则$f[f(0)]=$_____

7 已知向量$\vec{a}=(3,k,-1)$,向量$\vec{b}=(2,1,3k)$且两向量垂直，则$k=$_____

8 已知$f(x)$在R上连续且$\int_1^2 f(2x)dx=1$，则$\int_2^4 f(x)dx=$_____

9 已知$z=x^2e^y$,则全微分$dz=$_____

10 已知$f(x)$在R上有连续导数，积分$I=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{1-\sqrt{y-1}} f(x,y)dx$,则交换积分次序后得$I=$_____

三、计算题（本大题共8小题，每小题6分，共48分）

11 求极限$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+x-3}-x}$

12 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+3\ln(1+x)}{1+x-\cos 2x}$

13 求不定积分$\int(\dfrac{1}{x^2}+x\cos x)dx$

14 求定积分$\int_0^2 \ln(2+\sqrt{x})dx$

15 求过点（2,−1,1）且平行于直线$\begin{cases}3x-y+2z+1=0\\ x-2y+3z+5=0\end{cases}$的直线方程

烟台大学统招专升本培训中心

16 求微分方程$e^y y' = x^2(5+e^y)$的通解

17 已知幂函数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(\sqrt{n}+1)3^n}$,求收敛域

18 计算二重积分$\iint_D x dx dy$，其中D是由曲线$y=|x^2-4|$和直线$y=3x$所围成的闭区域

四、应用题（本大题共2小题，每小题7分，共14分）

19 设平面图形D是由曲线$y=e^x, y=\sqrt{2x-x^2}$和直线$x=0, x=1$所围成的封闭区域，

求D绕x轴旋转一周得到的旋转体的体积

20 求函数$f(x)=x+\ln(1+x^2)-4\arctan x$的极值，并判断是极大值还是极小值

五、证明题（本大题共1小题，每小题8分，共8分）

21 已知函数$f(x)$在[0,1]连续，在（0,1）可导

证明：$\exists \xi \in (0,1)$，使得$\int_0^1 f(x)dx = f(0)+f'(\xi)(1-\xi)$

烟台大学统招专升本培训中心

高等数学（一）答案

一、选择

1 C 2 A 3 D 4 B 5 B

二、填空题

6 4　　7 $k=3$　　8 2　　9 $dz=2xe^{y}dx+x^{2}e^{y}dx$　　10 $\int_{0}^{1}dx\int_{x^{2}}^{x^{2}-2x+2}f(x,y)dy$

三、计算题

11 6

12 4

13 $-\frac{1}{x}+x\sin x+\cos x+c$

14 $4\ln 2+2$

15 $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-7}=\frac{z-1}{5}$

16 $y=\ln(ce^{\frac{x^{3}}{3}}-5)$

17 [2,8)

18 $\frac{99}{4}$

19 $\pi(\frac{e^{2}}{2}-\frac{7}{6})$

20 极小值$f(-1)=\pi-1-\ln 2$

极大值$f(3)=$

21　得证

烟台大学统招专升本培训中心

山东省2024年普通高等教育专升本统一考试

高等数学（Ⅰ）真题试卷

一、选择题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1、下列函数是偶函数的是（　　）

A. $y=\tan x$　　B. $y=\cos x$　　C. $y=x^3$　　D. $y=3^x$

2、若函数 $f(x)=\begin{cases}4x+5, & x<1\\ 2-x^2, & x\geq 1\end{cases}$，则 $x=1$ 是函数的（　　）

A.连续点　　B.可去间断点　　C.跳跃间断点　　D.无穷间断点

3、函数 $y=x^2(2\ln x-5)$ 的拐点是（　　）

A. $\left(e^2,e^4\right)$　　B. $\left(e^2,-e^4\right)$　　C. $\left(e,3e^2\right)$　　D. $\left(e,-3e^2\right)$

4、函数 $z=\arctan\left(x^2y\right)$ 在点 $(1,1)$ 处的全微分为（　　）

A. $dx+\frac{1}{2}dy$　　B. $\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy$　　C. $\frac{1}{2}dx+dy$　　D. $2dx+dy$

5、下列级数绝对收敛的是（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n+3}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n+1}{n^n}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{1+\ln^3 n}$

烟台大学统招专升本培训中心

二、填空题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

6、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$　　.

7、若两向量分别为 $\vec{a}=(3,0,4)$，$\vec{b}=(2,2,1)$，则两向量的夹角余弦为_____.

8、若微分方程 $16y''-8y'+y=0$，则通解为_____.

9、已知无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{(2n+1)3^n}$，则收敛半径为_____.

10、已知函数 $f(x)$ 在 R 上具有连续的导数，且满足 $f(0) = f(1)$，$\int_0^1 t f(x-t)dt = 2x+1$，则 $\int_0^1 x f'(x)dx =$ _____.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11、求极限 $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3} - \frac{9}{x^2-3x}\right)$.

12.求极限 $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}+x-2}{1-x-\ln x}$.

烟台大学统招专升本培训中心

13、已知函数 $y = y(x)$ 是由方程 $e^{x-y} + x^2 - y = 1$ 确定的隐函数，求该函数在点 $(1,1)$ 处的切线方程.

14、求不定积分 $\int \frac{x^2+5x+2}{x^2+4}dx$.

15、求定积分 $\int_0^1 xe^{\sqrt{1-x^2}}dx$.

16、已知平面 π 过点 $(1,0,2)$，且与直线 $\begin{cases} x-y+z+2=0 \\ x-3y+2z+1=0 \end{cases}$ 垂直，求原点到平面的距离.

烟台大学统招专升本培训中心

17、求微分方程 $xdy-\left(1+y^2\right)\ln xdx=0$ 的通解.

18、计算二重积分 $\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{5}{2}}dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$，直线 $y=x$，$x=1$ 所围成的封闭区域。

四、应用题（本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

19、求由曲线 $y=\begin{cases}3x, & x<0\\ x^2-2x, & x\geq 0\end{cases}$ 与 $y=-x^2+4$ 所围成的封闭图形的面积.

烟台大学统招专升本培训中心

20、求函数 $f(x,y)=x^2-4xy+2y^2+2y^3$ 的极值，并判断是极大值还是极小值.

五、证明题（本大题共 1 小题，每小题 8 分，共 8 分）

21、已知函数 $f(x)$ 在[0，1]上连续，在 $(0,1)$ 内可导，在 $(0,1)$ 内存在最大值 $M>0$，且满足 $f(0)=f(1)=0$，证明：存在一点 ξ，$\eta\in(0,1)$，使得 $|f'(\xi)|+|f'(\eta)|\geq 4M$ 成立.

烟台大学统招专升本培训中心

2024 山东专升本-数学 1 参考答案

一、单项选（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1.B　　2.C　　3.D　　4.A　　5.C

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. $e^{\frac{1}{2}}$　　7. $\frac{2}{3}$　　8. $y=(C_1+C_2x)e^{\frac{x}{4}}$　　9.3　　10.-2

三、计算（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11.解：$\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{x}{x-3}-\frac{9}{x^2-3x}\right)=\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x+3}{x}=2$

12.解：$\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x-1}+x-2}{1-x-\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x-1}+1}{-1-\frac{1}{x}}=-1.$

13.解：方程两边对 x 求导，得 $e^{x-y}(1-y')+2x-y'=0.$

则 $y'\big|_{x=1}=\frac{3}{2}$. 即切线的斜率 $k=\frac{3}{2}$.

所以切线方程为 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

14.解：$\int\frac{x^2+5x+2}{x^2+4}dx$

$=\int\left(1+\frac{5x}{x^2+4}-\frac{2}{x^2+4}\right)dx$

$=x+\frac{5}{2}\ln\left(x^2+4\right)-\arctan\frac{x}{2}+C.$

烟台大学统招专升本培训中心

15.解：令 $\sqrt{1-x^2}=t$.

$\int_0^1 xe^{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1 te^t dt=te^t\big|_0^1-\int_0^1 e^t dt=1.$

16.解：由题意，平面Π的法向量为 $n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=(1,-1,-2).$

所求平面几的方程为 $x-y-2z+3=0$.

原点到平面几的距离 $d=\dfrac{3}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

17.解：分离变量得 $\dfrac{1}{1+y^2}dy=\dfrac{\ln x}{x}dx$.

两边积分得 $\arctan y=\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$.

18.解：今 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,

则 D 在极坐标系下为：$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}, 1\le r\le\dfrac{1}{\cos\theta}$.

$$\iint_D\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{5}{2}}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}r^{-4}dr=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^3\theta-1\right)d\theta=\frac{\pi}{12}-\frac{5\sqrt{2}}{36}$$

四、应用题（本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

19.解：曲线 $y=-x^2+4$ 与 $y=3x(x\le 0)$ 的交点为 $(-4,-12)$.

曲线 $y=-x^2+4$ 与 $y=x^2-2x(x>0)$ 的交点为 $(2,0)$,

则所求面积为

$$S=\int_{-4}^{0}\left[\left(-x^2+4\right)-3x\right]dx+\int_0^2\left[\left(-x^2+4\right)-\left(x^2-2x\right)\right]dx=\frac{76}{3}$$

20.解：由得驻点为

$\begin{cases}f_x=2x-4y=0,\\ f_y=-4x+4y+6y^2=0\end{cases}$ 得驻点 $(0,0)\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

$f_{xx}=2, f_{xy}=-4, f_{yy}=4+12y$

烟台大学统招专升本培训中心

在点 $(0,0)$ 处， $AC-B^2=-8<0$,所以 $(0,0)$ 不是极值点：

在点 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ 处，. $AC-B^2=8>0$,又 $A>0$

所以 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ 为极小值点，极小值为 $f\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{8}{27}$.

五、证明愿（本大题共 1 小题，共 8 分）

21.证明：因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由最值定理，

存在点 $x_0\in(0,1)$.使得 $f\left(x_0\right)=M$.

因 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上连续，在 $(0,x_0)$ 内可导，又 $f(0)=0$，

由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,x_0)$. 使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{f(x_0)}{x_0}.$$

同理，在 $[x_0,1]$ 上对函数 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理，且 $f(1)=0$ 得

存在 $\eta\in(x_0,1)$, 使得 $f(\eta)=\dfrac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\dfrac{-f(x_0)}{1-x_0}$,

从而 $|f(\xi)|+|f'(\eta)|=\left(\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{1}{1-x_0}\right)M$

又 $0<x_0(1-x_0)\le\dfrac{1}{4}$, 则 $\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{1}{1-x_0}=\dfrac{1}{x_0(1-x_0)}\ge 4$

所以 $|f(\xi)|+|f'(\eta)|\ge 4M.$

烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2023 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学（Ⅰ）

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1.函数 $y=\ln(3x-1)$ 的定义域为

A. $(\frac{1}{3},+\infty)$

B. $(-\infty,\frac{1}{3})$

C. $[\frac{1}{3},+\infty)$

D. $(-\infty,\frac{1}{3}]$

2.下面属于三阶微分方程的是

A. $x^2y''-xy'+y=0$

B. $x(y')^3-2yy'+x=0$

C. $y'''-3y''=0$

D. $x^2dy+y^3dx=0$

3. $x\to 0$ 时以下不是无穷小量的是

A. $\tan x$

B. $\sin 2x$

C. $\ln(1+x)$

D. e^x+1

4.已知 $f(x)$ 在 $x=3$ 处可导，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(3-2\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=4$，则 $f'(3)=$

A. 2

B. -2

C. 4

D. -4

5.级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列收敛的是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+\dfrac{1}{n})$

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+\dfrac{1}{n^2})$

D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6.极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}}=$ _____

7.已知 $\vec{a}=(-2,1,k),\vec{b}=(4,5,1)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $k=$ _____

8.已知参数方程 $\begin{cases}x=t^3+2t\\ y=\arcsin t\end{cases}$，则 $\dfrac{dy}{dx}|_{t=0}=$ _____

9.已知 $\int_0^{2x}f(t)dt=x^3+x^2$，则 $f(4)=$

10.二重积分 $\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{-x^2+2x+4}f(x,y)dy+\int_0^1dx\int_{5x}^{-x^2+2x+4}f(x,y)dy$ 交换积分次序后为_____

三、解答题（本大题共 8 个小题，每小题 6 分，共 48 分）

11.求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$

12.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{1-\cos x}-\cos x}{x^2}$

13.求不定积分 $\int\dfrac{1}{x^2+10x+26}dx$

烟台大学统招专升本培训中心

14.求过点 $A(1,0,-4), B(3,1,-2)$ 且与直线 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$ 平行的平面方程

15.求二元函数 $z=\sqrt{y^2+1}+\ln(x-y)$ 的全微分

16.求微分方程 $x^2y'+xy=x^2+\ln x$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=\frac{1}{2}$ 的特解

17.计算二重积分 $\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{3}x, 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

18.求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}$ 的收敛域与和函数

四、应用题（本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

19.求由直线 $x+y=2$，曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 y 轴围成图形绕 x 轴旋转一周而围成旋转体的体积

20.求函数 $f(x)=(2x-3)e^x-x^2+x$ 的极值

五、证明题（本大题共 1 道小题，每小题 8 分，共 8 分）

21.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=1$

证明：（1）对于任意整数 $n\ge 2$，存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $\int_0^{x_0} f(x)dx=\frac{1}{n}$

（2）在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ，η，使得 $f(\eta)+3f(\xi)=4f(\xi)f(\eta)$

烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2023 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学 I 试题参考答案

第 I 卷

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. C　$3x-1>0$, 解得 $x>\frac{1}{3}$, 所以定义域为 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

2. C　微分方程的阶数等于方程中所包含末知函数的最高阶数的阶数,
C 选项的微分方程中最高阶导数为三阶导数, 所以该微分方程为三阶微分方程.

3. D　极限为零的量称为无穷小量, $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+1)=2$.

4. B　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(3-2\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=-2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(3-2\Delta x)-f(3)}{-2\Delta x}=-2f'(3)=4$
所以 $f'(3)=-2$

5. D　收敛 + 收敛 = 收敛; 当 $u_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 时, A、B、C 三个选项均发散.

第 II 卷

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. e^5　利用第二重要极限可知 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}}=e^5$

7. 3　由题意可知 $(-2,1,k)\cdot(4,5,1)=-8+5+k=0$, 解得 $k=3$.

8. $\frac{1}{2}$　$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{3t^2+2}=\frac{1}{(3t^2+2)\sqrt{1-t^2}}$, 则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}$

9. 8　两边同时对 x 求导得 $2f(2x)=3x^2+2x$, 令 $x=2$ 得 $2f(4)=16$ 所以 $f(4)=8$.

10. $I=\int_0^1 dy\int_{-y}^{\frac{y}{5}}f(x,y)dx+\int_1^5 dy\int_{1-\sqrt{5-y}}^{\frac{y}{5}}f(x,y)dx$

$\begin{cases}y=5x\\y=-x^2+2x+4\end{cases}$ 交点坐标为 $(1,5)$, $\begin{cases}y=-x\\y=-x^2+2x+4\end{cases}$ 交点坐标为 $(-1,1)$

故交换积分次序后

$$I=\int_0^1 dy\int_{-y}^{\frac{y}{5}}f(x,y)dx+\int_1^5 dy\int_{1-\sqrt{5-y}}^{\frac{y}{5}}fR(x,y)dx$$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{2}$

12. 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{1-\cos x}\cdot\sin x+\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(e^{1-\cos x}+1)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{1-\cos x}+1}{2}=1$

13. $\int\frac{dx}{x^2+10x+26}=\int\frac{1}{(x+5)^2+1}d(x+5)=\arctan(x+5)+C$

14. 由题意可知 $\overrightarrow{AB}=(2,1,2)$, 因为所求平面过点 A、B 且与已知直线垂直

所以所求平面的法向量 $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB},\vec{n}\perp\vec{s}$, 故可取

$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&2\\3&-1&2\end{vmatrix}=(4,2,-5)$, 又平面过点 $A(1,0,-4)$

所以平面方程为 $4(x-1)+2(y-0)-5(z+4)=0$, 即 $4x+2y-5z-24=0$

15. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x-y},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}-\frac{1}{x-y}=\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}-\frac{1}{x-y}$

所以 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{1}{x-y}dx+\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}-\frac{1}{x-y}\right)dy$

16. 微分方程整理得 $y'+\frac{1}{x}y=1+\frac{\ln x}{x^2}$, 其中 $p(x)=\frac{1}{x},q(x)=1+\frac{\ln x}{x^2}$

$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\left(1+\frac{\ln x}{x^2}\right)e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$

$=\frac{1}{x}\left[\int\left(1+\frac{\ln x}{x^2}\right)\cdot xdx+C\right]=\frac{1}{x}\left[\int\left(x+\frac{\ln x}{x}\right)dx+C\right]=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln^2 x+C\right)$

烟台大学统招专升本培训中心

$$=\frac{1}{2}x+\frac{\ln^2 x}{2x}+\frac{C}{x}$$

又$y|_{x=1}=\frac{1}{2}$，代入通解得$C=0$，所以该微分方程的特解为$y=\frac{1}{2}x+\frac{\ln^2 x}{2x}$

17. 设 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则 $0\le\theta\le\frac{\pi}{3},1\le r\le 2$

$$\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^2\frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r}\cdot rdr=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^2 r^2\sin\theta\cos\theta dr$$

$$=\frac{7}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\cos\theta d\theta=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{7}{8}$$

18. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)n!}{(n+3)(n+1)!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{(n+3)(n+1)}\right|=0$

所以 $R=\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}$

$$S'(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=xe^x$$

所以和函数为 $S(x)=\int_0^x x\,e^x dx=xe^x|_0^x-e^x|_0^x=xe^x-e^x+1,x\in(-\infty,+\infty)$

四、应用题（本大题共 2 题，每小题 7 分，共 14 分）

19. $V_x=\pi\int_0^1(2-x)^2dx-\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2dx=\pi\int_0^1(4-4x+x^2)dx-\pi\int_0^1 x\,dx$

$$=\pi\left(4x-2x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1-\pi\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{11}{6}\pi$$

20. 函数的定义域为 **R**，

$f'(x)=2e^x+(2x-3)e^x-2x+1=e^x(2x-1)-(2x-1)=(2x-1)(e^x-1)$

令$f'(x)=0$ 得$x_1=\frac{1}{2},x_2=0,f''(x)=2(e^x-1)+(2x-1)e^x=2xe^x+e^x-2$

$f''\left(\frac{1}{2}\right)=2e^{\frac{1}{2}}-2=2\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)>0,f''(0)=1-2<0$

所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极小值，且极小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-2\sqrt{e}$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，且极大值为 $f(0)=-3$

五、证明题（本大题共 1 小题，每小题 8 分，共 8 分）

21. (1) 令 $F(x)=\int_0^x f(x)dx-\frac{1}{n}$，显然 $F(x)$ 在 [0,1] 上连续

$F(0)=-\frac{1}{n}<0,F(1)=\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}>0$，即$F(0)\cdot F(1)<0$

由零点定理知，对于任意 $n\ge 2$，至少存在 $x_0\in(0,1)$，

使得 $F(x_0)=0$，即 $\int_0^{x_0}f(x)dx=\frac{1}{n}$

(2) 令 $G(x)=\int_0^x f(t)dt-\frac{1}{4}$，由 (1) 可知 $G(x_0)=0$，

显然 $G(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上连续，在 $(0,x_0)$ 内可导，由拉格朗日中值定理知，

存在 $\eta\in(0,x_0)$，使得

$$G'(\eta)=\frac{G(x_0)-G(0)}{x_0}=\frac{0-\left(0-\frac{1}{4}\right)}{x_0}=\frac{\frac{1}{4}}{x_0}=f(\eta)$$

同理存在$\xi\in(x_0,1)$，使

得$G'(\xi)=\frac{G(1)-G(x_0)}{1-x_0}=\frac{1-\frac{1}{4}-0}{1-x_0}=\frac{\frac{3}{4}}{1-x_0}=f(\xi)$

$$4f(\xi)f(\eta)=4\cdot\frac{3}{4(1-x_0)}\cdot\frac{1}{4x_0}\cdot=\frac{3}{4x_0(1-x_0)}$$

$$f(\xi)+3f(\eta)=\frac{3}{4(1-x_0)}+\frac{3}{4x_0}=\frac{3}{4x_0(1-x_0)}$$

综上可知 $\exists\xi$、$\eta\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+3f(\eta)=4f(\xi)f(\eta)$.

烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2022 年普通高等教育专升本统一考试
高等数学（Ⅰ）试题

本试卷共 3 页，满分 100 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1.答卷前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷和答题卡指定的位置,并在答题卡指定位置中粘贴考生条形码。

2 作答选择题时,选出每小题答案后，须用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;如需改动，用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。作答非选择题时，须用 0.5 毫米黑伊签字笔将答案写在答题卡各题目指定区域内相应的位置。答在本试卷上无效。

3.考试结束后,将试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将答题卡的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+a, & x<0\\ 1, & x=0\\ b-\cos x, & x>0\end{cases}$ 在 x=0 处连续，则实数 a 和 b 的值是

A. $a=1,b=2$　　B. $a=1,b=-2$

C. $a=-1,b=2$　　D. $a=-1,b=-2$

2.以下向量与 $\vec{a}=(2,-3,1)$ 垂直的是

A. $(-2,3,-1)$　　B. $(3,0,2)$

C. $(3,2,1)$　　D. $(3,2,0)$

3.以下微分方程的通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}$（C_1,C_2 为任意常数）的是

A. $y''-2y'-8y=0$　　B. $y''+2y'-8y=0$

C. $y''-6y'+8y=0$　　D. $y''+6y'+8y=0$

4.下列级数发散的是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+2}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n})$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$

5.函数 $f(x,y)$ 在 R^2 上连续，将 $I=\int_0^2dx\int_0^{\sqrt{3}x}f(x,y)dy+\int_2^4dx\int_0^{\sqrt{16-x^2}}f(x,y)dy$ 的极坐标形式为

A. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^4f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$　　B. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^4f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_0^4f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$　　D. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_0^4f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6.设极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{3x})^{kx}=e^2$，则 $k=$_____.

7.设点 $(1,a)$ 是曲线 $y=ax^3-x^2-2x+3$ 的拐点，则 $a=$_____.

8.已知两点 $A(-2,1,-1),B(2,5,1)$，则 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=$_____.

9.当 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式为_____.

10.已知函数 $f(x)$ 在 R 上连续，且 $\int_0^{1-2x}f(t)dt=x^2$，则 $f(x)=$_____.

三、解答题（本大题共 7 小题，每小题 6 分，共 42 分）

11.求极限 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}$

烟台大学统招专升本培训中心

12.求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos 3x}{3x^2}$.

13.求不定积分 $\int(2x\ln x+\sin x)dx$.

14.求过点 $(0,2,3)$ 且过直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ 和 $\begin{cases}x=3+t\\y=2+2t\\z=1+t\end{cases}$ 都平行的平面方程.

15.求微分方程 $2\sqrt{x}y'=y^2+1$ 的通解.

16.已知 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\sin(xz)=yz$ 确定的函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

17. 计算二重积分 $\iint\limits_D xy^3dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x,y=\dfrac{x}{2},y=1$ 围成的闭区域.

四、应用题（本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

18.求函数 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-5x^2+12x-\dfrac{1}{3}$ 的极值，并判断是极大值还是极小值.

19.过点 $(-1,1)$ 作曲线 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ 的法线，求其与该曲线围成的图形的面积.

烟台大学统招专升本培训中心

五、证明题（本大题共 2 个小题，第 20 小题 6 分，第 21 题 8 分，共 14 分)

20.证明：当 $x>0$ 时，$x+\frac{x^2}{2}>(1+x)\ln(1+x)$

21.设函数 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续，在 $(1,3)$ 内可导，且 $f(1)=f(2)=1, f(3)=0$.

证明（1）存在 $\xi\in(2,3)$ 使得 $f(\xi)=\frac{1}{\xi}$;

（2）存在 $\eta\in(2,3)$，使得 $\eta^2 f'(\eta)+1=0$.

烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2022 年普通高等教育专升本统一考试
高等数学（Ⅰ）试题答案解析

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. (A)

解：因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，因此 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$，即 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$，

而 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+a\right)=a$ ， $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(b-\cos x\right)=b-1$ ， $f(0)=1$ ， 即

$a=b-1=1$，所有 $a=1,b=2$，答案选 A

2. (D)

解：两个向量垂直的充要条件为数量积为 0，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.已知向量 $\vec{a}=(2,-3,1)$，设题目四个选项的向量为 $\vec{b}$，D 选项中 $\vec{b}=(3,2,0)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times 3+(-3)\times 2+1\times 0=0$ ，因此 $\vec{a}\perp\vec{b}$，而 A、B、C 选项中都有 $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$，因此答案选 D

3. (A)

解：二阶线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的特征方程为 $r^2+pr+q=0$，根据通解公式可知特征方程的解为 $r_1=-2,r_2=4$，因此原方程可写为 $(r+2)(r-4)=0$，整理得 $r^2-2r-8=0$，因此原微分方程为 $y''-2y'-8y=0$，答案选 A.

4. (B)

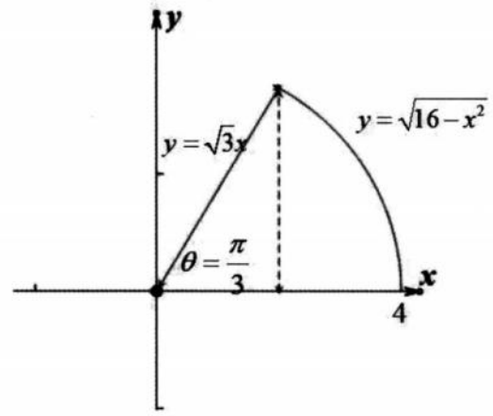
解：A 选项中根据正项级数比值法可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^2+1}}{\dfrac{1}{n^2}}=1$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以原级数收敛。

B 选项中根据正项级数比值法可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=1$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以原级数发散。C 选项为交错级数，根据莱布尼兹判别法 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$ ，因此原级数收敛。D 选项为几何级数，$\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ 因此收敛。答案选 B

5. (B)

解：由题意可知积分区域为 $\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le\sqrt{3}x\end{cases}$，

$\begin{cases}2\le x\le 4\\ 0\le y\le\sqrt{16-x^2}\end{cases}$，



图形如图所示，化为极坐标为 $\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}\\ 0\le\rho\le 4\end{cases}$，

因此原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^4 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$，

答案选 B

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 6

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{3x})^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{3x})^{3x\cdot\frac{k}{3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\dfrac{1}{3x})^{3x}\right]^{\frac{k}{3}}=e^{\frac{k}{3}}=e^2$，即 $\dfrac{k}{3}=2$，因此 $k=6$.

7. $\dfrac{1}{3}$

烟台大学统招专升本培训中心

解：由题意可知，$y'=3ax^2-2x-2$，$y''=6ax-2$，根据拐点处二阶导数为零，因此

$y''(1)=0$，即 $6a-2=0$，所以 $a=\dfrac{1}{3}$。

8. 6

解：已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 为终点 B 的坐标减去 A 的坐标，因此 $\overrightarrow{AB}=(4,4,2)$，进一步由

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$.

9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n x^n$

解：根据麦克劳林公式 $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$ 得，$f(x)=\dfrac{1}{1-2x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n x^n$

10. $\dfrac{x-1}{2}$

解：等式两边同时求导得 $\left(\int_0^{1-2x}f(t)dt\right)'=\left(x^2\right)'$，计算得 $f(1-2x)(1-2x)'=2x$，整理得

$f(1-2x)=-x$，令 $1-2x=t$，则 $x=\dfrac{1-t}{2}$，代入函数得 $f(t)=\dfrac{t-1}{2}$，因此 $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$

三、解答题 (本大题共 8 小题，每小题 7 分，共 56 分)

11.**解**：$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}{2x-3-1}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}{2(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x-3}+1}{2}$

$=1$

12.**解**：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin3x}{6x}=\dfrac{3}{2}$

或者 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}(3x)^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{9x^2}{2}}{3x^2}=\dfrac{3}{2}$

13.**解**：$\int(2x\ln x+\sin x)dx$

$=\int\ln x d\left(x^2\right)+\int\sin x dx$

$=x^2\ln x-\int x^2 d(\ln x)+\int\sin x dx$

$=x^2\ln x-\int x dx-\cos x$

$=x^2\ln x-\dfrac{1}{2}x^2-\cos x+C$

14.**解**：由题意，两直线的方向向量分别为 $\vec{s_1}=(2,1,3)$，$\vec{s_2}=(1,2,1)$，则所求平面的法向量为

$\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&3\\1&2&1\end{vmatrix}=-5\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$，所求平面的点法式方程为

$-5(x-0)+(y-2)+3(z-3)=0$，即 $5x-y-3z+11=0$

15.**解**：分离变量得 $\dfrac{dy}{1+y^2}=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$，

两端积分 $\int\dfrac{dy}{1+y^2}=\int\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$，

得通解 $\arctan y=\sqrt{x}+C$

16.**解**：（解法一）令 $F(x,y,z)=\sin(xz)-yz$，则

$F_x=z\cos(xz)$，$F_y=-z$，$F_z=x\cos(xz)-y$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{z\cos(xz)}{y-x\cos(xz)}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{z}{x\cos(xz)-y}$

烟台大学统招专升本培训中心

（解法二）

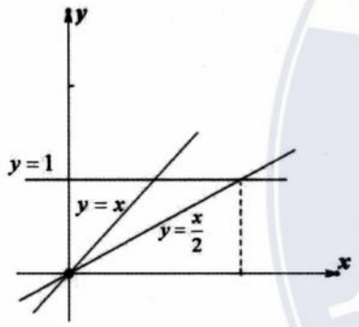
两边关于 x 同时求导 $\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos(xz)=y\frac{\partial z}{\partial x}$，

整理可得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z\cos(xz)}{y-x\cos(xz)}$.

两边关于 y 同时求导 $x\frac{\partial z}{\partial y}\cos(xz)=z+y\frac{\partial z}{\partial y}$，

整理可得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{x\cos(xz)-y}$.

17.**解**：积分区域如图



$$\iint_D xy^3dxdy=\int_0^1dy\int_y^{2y}xy^3dx$$

$$=\int_0^1y^3\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_y^{2y}dy$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1y^5dy$$

$$=\frac{1}{4}$$

四、计算题（本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

18.**解**：（解法一）定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=2x^2-10x+12=2(x-2)(x+3)$，令 $f'(x)=0$，

解得 $x_1=2,x_2=3$

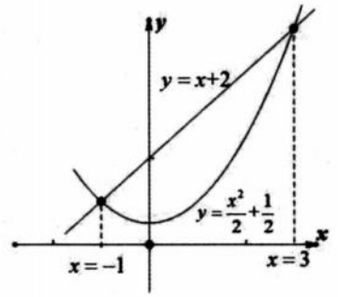
x	$(-\infty,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 取极大值 $f(2)=9$，$f(x)$ 在 $x=3$ 取极小值 $f(3)=\frac{26}{3}$

（解法二）$f''(x)=4x-10$，又 $f''(2)=-8<0$，在 $x=2$ 取极大值 $f(2)=9$；

又 $f''(3)=2>0$，在 $x=3$ 取极小值 $f(3)=\frac{26}{3}$；

19.**解**：$y'(x)=x$，点 $(-1,1)$ 处法线斜率 $k=1$，



所以，过点 $(-1,1)$ 的法线方程为 $y=x+2$，

该法线与抛物线的另一个交点为 $(3,5)$，因此围成的图形的面积

$$S=\int_{-1}^3(x+2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2})=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_{-1}^3=\frac{16}{3}$$

五、证明题（本大题共 2 个小题，第 20 小题 6 分，第 21 题 8 分，共 14 分）

20.**证明**：令 $f(x)=2x+\frac{x^2}{2}-(1+x)\ln(1+x)$，

$f'(x)=x-\ln(1+x),f''(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$，

当 $x>0$ 时 $f''(x)>0$，所以当 $x>0$ 时 $f'(x)$ 单调递增，

因此，$f'(x)>f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 单调递增，

从而，$f(x)>f(0)=0$，

即 $2x+\frac{x^2}{2}>(1+x)\ln(1+x)$

21.**证明**：（1）令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{x}$

由已知，$F(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续，且有

$F(2)=f(2)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0,F(3)=f(3)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}<0,$

烟台大学统招专升本培训中心

由零点定理知：$\xi\in(2,3)$，使得$F(\xi)=0$

即$f(\xi)=\frac{1}{\xi}$

（2）由已知，$F(x)$在$[1,\xi]$上连续，$(1,\xi)$内可导，且有$F'(x)=f'(x)+\frac{1}{x^2}$

令$F(1)=f(1)-1=0, F(\xi)=f(\xi)-\frac{1}{\xi}=0$

由罗尔定理得：$\eta\in(1,\xi)\subset(1,3)$，使得

$F'(\eta)=0$即$f'(\eta)+\frac{1}{\eta^2}=0$，化简$\eta^2 f(\eta)+1=0$

烟台大学统招专升本培训中心

山东省2021年普通高等教育专升本统一考试
高等数学（Ⅰ）试题

本试卷分为第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，共3页。满分100分。考试用时120分钟。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

注意事项：

1. 答题前，考生务必用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上，并将姓名、考生号、座号填（涂）在答题卡规定的位置。

2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在本试卷上无效。

3. 第Ⅱ卷答题必须用0.5毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

第Ⅰ卷

一、单项选择题（每题3分，共15分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将答题卡的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，则 $x=2$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

（A）可去间断点　　（B）跳跃间断点　　（C）无穷间断点　　（D）连续点

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & x\leqslant 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的（　　）.

（A）左、右导数都存在且相等　　（B）左导数存在，右导数不存在

（C）左导数不存在，右导数存在　　（D）左、右导数都存在但不相等

3. 以下是二阶微分方程的是（　　）.

（A）$(y')^2-3y=0$　　（B）$(y'')^2+x^2y'=0$

（C）$yy'+x^2=0$　　（D）$y'''+x^2y''=0$

4. 以下级数条件收敛的是（　　）.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n$

5. 已知函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=$（　　）.

（A）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

（B）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

（C）$\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

（D）$\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

第Ⅱ卷

二、填空题（每题3分，共15分）

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & |x|>1\\ 0, & |x|\leqslant 1\end{cases}$，则 $f[f(2021)]=$_____.

2. 点（1，2，3）到平面 $2x+y-2z+4=0$ 的距离是_____.

3. 向量（1，0，1）与（1，$\sqrt{2}$，1）的夹角是_____.

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n(n+1)}x^n$ 的收敛半径是_____.

5. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，则 $\int_{-1}^1 f(|x|)\mathrm{d}x=$_____.

三、计算题（每题6分，共42分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^x$.

烟台大学统招专升本培训中心

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}{\sin x^3}$.

3. 求不定积分 $\int\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$.

4. 求过点 (1，0，1) 且与平面 $x+y-z-1=0$ 和 $2x+z+1=0$ 都平行的直线的方程.

5. 求微分方程 $y''-4y'+7y=0$ 的通解.

6. 已知函数 $z=f(u，v)$ 可微，而 $u=x\arcsin y$，$v=\dfrac{y}{x}$. 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

7. 计算二重积分 $\iint\limits_D(2x+y)dx\,dy$，其中 D 是由直线 $y=3$，$y=x$ 与曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域.

四、应用题（第 1 题 6 分，第 2 题 8 分，共 14 分）

1. 求由直线 $x=0$，$x=2$，$y=0$ 与曲线 $y=e^x$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积.

2. 设 $k>0$，求函数 $f(x)=\ln(1+x)+kx^2-x$ 的极值点，并判断是极大值点还是极小值点.

烟台大学统招专升本培训中心

五、证明题（第 1 题 6 分，第 2 题 8 分，共 14 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且 $f(0)\neq 0$，$0<f(1)<1$. 证明：存在 $x_0\in(0, 1)$，使得 $f^2(x_0)=x_0$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

(1) 存在 $\xi_1\in(0, 1)$，使得 $f'(\xi_1)=2\xi_1$；

(2) 存在 $\xi_2\in\left(0, \frac{1}{2}\right)$，$\xi_3\in\left(\frac{1}{2}, 1\right)$，使得 $f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=2(\xi_2+\xi_3)$.

烟台大学统招专升本培训中心

山东省2021年普通高等教育专升本统一考试
高等数学（Ⅰ）试题答案解析

一、选择题

1.（A）

解： $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x}{1}=4$，极限存在的间断点为可去间断点，答案选（A）.

2.（D）

解： 由题意可知 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\frac{1}{2}x^2-0}{x}=0$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左右导数存在但不相等，答案选（D）.

3.（B）

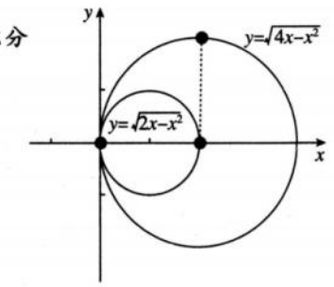
解： 微分方程中未知函数的导数的最高阶称为微分方程的阶，因此选项（A）、（C）为一阶微分方程，（D）为三阶微分方程，（B）为二阶微分方程，答案选（B）.

4.（B）

解：（A）中，$\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right|<\dfrac{1}{n^2}$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，根据正项级数的比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right|$ 收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$ 绝对收敛。（B）中，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ 满足莱布尼茨不等式，因此收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$，则根据 p 级数可知发散，因此原级数为条件收敛。（C）中，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-\dfrac{2}{3})^n\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2}{3})^n$，因为 $\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$，根据几何级数可知级数收敛，因此原级数绝对收敛。（D）中因为 $\left|-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{3}{2}>1$，根据几何级数可知原级数发散，答案选（B）.

5.（C）

解： 由题意可知积分区域为 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$2\cos\theta\leqslant\rho\leqslant 4\cos\theta$，积分区域如图所示.



化为直角坐标系下的累次积分可得

$\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}}f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_0^{\sqrt{4x-x^2}}f(x,y)dy$，

答案选（C）.

二、填空题

1. 0

解： 根据题意可知 $f(2021)=\dfrac{1}{2021}$，$f[f(2021)]=0$.

2. $\dfrac{2}{3}$

解： 根据点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式 $d=\left|\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$ 可知，$d=\left|\dfrac{2\cdot 1+2-2\cdot 3+4}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}\right|=\dfrac{2}{3}$.

3. $\dfrac{\pi}{4}$

解： 根据向量的数量积可知，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1\cdot 1+0\cdot\sqrt{2}+1\cdot 1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因此夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

4. $\dfrac{1}{3}$

解： $a_n=\dfrac{3^n}{n(n+1)}$，$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{3^n}{n(n+1)}}\right|=3$，则收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{3}$.

5. 2

解： 令 $F(x)=f(|x|)$，则 $F(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=F(x)$，即 $f(|x|)$ 为偶函数，因此 $\int_{-1}^{1}f(|x|)dx=2\int_0^1 f(|x|)dx=2\int_0^1 f(x)dx=2$.

烟台大学统招专升本培训中心

三、计算题

1. **解**：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x+1}}$$

$$=e^{2}.$$

2. **解**：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}{\sin x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{3x^2\cos x^3}$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x^3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{2xe^{x^2}}{2x}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

3. **解**：$\int\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx=\int\ln(1+x^2)d\left(-\dfrac{1}{x}\right)$

$$=-\frac{1}{x}\ln(1+x^2)+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$=-\frac{1}{x}\ln(1+x^2)+\int\frac{2}{1+x^2}dx$$

$$=-\frac{1}{x}\ln(1+x^2)+2\arctan x+C.$$

4. **解**：（解法一）

平面 $x+y-z-1=0$ 的法向量 $\vec{n_1}=(1,1,-1)$，平面 $2x+z+1=0$ 的法向量 $\vec{n_2}=(2,0,1)$.

则所求直线的方向向量

$$\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&-1\\2&0&1\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}.$$

因此，过点（1，0，1）且与两平面平行的直线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{-2}.$$

（解法二）过点（1，0，1）且与平面 $x+y-z-1=0$ 平行的平面方程

$(x-1)+y-(z-1)=0$，即 $x+y-z=0$.

过点（1，0，1）且与平面 $2x+z+1=0$ 平行的平面方程

$2(x-1)+(z-1)=0$，即 $2x+z-3=0$.

所以，所求直线方程为

$$\begin{cases}x+y-z=0\\2x+z-3=0\end{cases}.$$

5. **解**：微分方程 $y''-4y'+7y=0$ 的特征方程是 $\lambda^2-4\lambda+7=0$，

其特征根是 $\lambda_1=2+\sqrt{3}i$，$\lambda_2=2-\sqrt{3}i$，

则方程的通解为：$y=e^{2x}(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)$.

6. **解**：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_v\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$=\arcsin y\cdot f_u-\frac{y}{x^2}\cdot f_v.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\cdot f_u+\frac{1}{x}\cdot f_v.$$

7. **解**：$xy=1$，$y=3$ 和 $y=x$ 交点分别为：（1，1），（3，3）和 $\left(\dfrac{1}{3},3\right)$，

则 $\iint\limits_D(2x+y)dx\,dy=\int_1^1dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}(2x+y)dx$

$$=\int_1^3(x^2+xy)\Big|_{\frac{1}{y}}^{y}dy$$

$$=\int_1^3(2y^2-\frac{1}{y^2}-1)dy$$

$$=\left(\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{y}-y\right)\Big|_1^3=\frac{44}{3}.$$

四、应用题

1. **解**：所得图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为：

$$V=\pi\int_0^2e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\pi e^{2x}\Big|_0^2$$

烟台大学统招专升本培训中心

$=\frac{1}{2}\pi(e^4-1)$.

2. **解**：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$，

求导得 $f'(x)=\frac{2kx^2+(2k-1)x}{1+x}$.

令 $f'(x)=0$，得：$x_1=0$，$x_2=-1+\frac{1}{2k}$.

(1) 当 $0<k<\frac{1}{2}$ 时，$x_2>x_1$.

x	$(-1, 0)$	0	$(0, -1+\frac{1}{2k})$	$-1+\frac{1}{2k}$	$(-1+\frac{1}{2k}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$f(x)$ 在 $x_1=0$ 处取极大值，在 $x_2=-1+\frac{1}{2k}$ 处取极小值.

(2) 当 $k=\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=\frac{x^2}{1+x}\geqslant 0$，函数在定义域内单调递增，不存在极值点.

(3) 当 $k>\frac{1}{2}$ 时，$-1<x_2<x_1$.

x	$(-1, -1+\frac{1}{2k})$	$-1+\frac{1}{2k}$	$(-1+\frac{1}{2k}, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$f(x)$ 在 $x_2=-1+\frac{1}{2k}$ 处取极大值，在 $x_1=0$ 处取极小值.

五、证明题

1. **证明**：令 $F(x)=f^2(x)-x$.

则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且 $F(0)=f^2(0)-0=f^2(0)>0$，$F(1)=f^2(1)-1<0$.

由零点定理知，存在 $x_0\in(0, 1)$，使得 $F(x_0)=0$，即 $f^2(x_0)-x_0=0$，

所以，$f^2(x_0)=x_0$.

2. **证明**：(1) 令 $F(x)=f(x)-x^2$.

已知 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，$(0, 1)$ 内可导，且 $F'(x)=f'(x)-2x$.

又因为 $F(0)=0$，$F(1)=0$. 由罗尔中值定理知，存在 $\xi_1\in(0, 1)$ 使得 $F'(\xi_1)=0$.

即 $f'(\xi_1)=2\xi_1$.

(2) 由拉格朗日中值定理可知：

存在 $\xi_2\in(0, \frac{1}{2})$，使得 $F(\frac{1}{2})-F(0)=\frac{1}{2}F'(\xi_2)$，

即 $f'(\xi_2)=2\xi_2+2F(\frac{1}{2})$，　　①

存在 $\xi_3\in(\frac{1}{2}, 1)$，使得 $F(1)-F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}F'(\xi_3)$，

即 $f'(\xi_3)=2\xi_3-2F(\frac{1}{2})$，　　②

由①、②式相加得

$f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=2(\xi_2+\xi_3)$.

烟台大学统招专升本培训中心

山东省2020年普通高等教育专升本统一考试
高等数学（Ⅰ）试题

本试卷分为第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，共4页。满分100分。考试用时120分钟。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

注意事项：

1. 答题前，考生务必用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上，并将姓名、考生号、座号填（涂）在答题卡规定的位置。

2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在本试卷上无效。

3. 第Ⅱ卷答题必须用0.5毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

第Ⅰ卷

一、单项选择题（每题3分，共15分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将答题卡的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 当 $x \to 0$ 时，以下函数是无穷小量的是（　　）.

(A) e^x　　(B) $\ln(x+2)$　　(C) $\sin x$　　(C) $\cos x$

2. 平面 $2x-3y+4z=8$ 与直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{4}$ 的位置关系是（　　）.

(A) 平行　　(B) 垂直　　(C) 相交但不垂直　　(D) 直线在平面上

3. 微分方程 $y''+7y'-8y=0$ 的通解是（　　）.

(A) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{8x}$　　(B) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-8x}$

(C) $y=C_1e^{x}+C_2e^{8x}$　　(D) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-8x}$

4. 曲线 $y=2x^3+3x^2-1$ 的拐点是（　　）.

(A) $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$　　(B) $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$　　(C) $(-1,\ 0)$　　(D) $(0,\ -1)$

5. 以下级数收敛的是（　　）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n^3+2n^2}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{3}$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{2^n+1}$

第Ⅱ卷

二、填空题（每题3分，共15分）

1. 函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{3}-1}$ 的定义域是_____.

2. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+2\ln x$ 在点 $(1,\ 1)$ 处的切线的方程是_____.

3. 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1$，$\int_a^b[2f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x=8$，则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=$_____.

4. 已知两点 $A(-1,\ 2,\ 0)$ 和 $B(2,\ -3,\ \sqrt{2})$，则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量是_____.

5. 已知函数 $f(x,\ y)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，设 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}f(x,\ y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}f(x,\ y)\mathrm{d}y$，则交换积分次序后 $I=$_____.

三、计算题（第1～7题每题6分，第8题7分，共49分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+x+2}-x\right)$.

烟台大学统招专升本培训中心

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t}{x^3}$.

3. 求不定积分 $\int \dfrac{\sqrt{x}+\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

4. 求过点 (1，－2，2) 且与两平面 $x+2y-z=1$ 和 $2x+y+3z=2$ 都垂直的平面方程.

5. 已知函数 $z=x\sin\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

6. 计算二重积分 $\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，$y=\sqrt{3}x$ 与圆周 $x^2+y^2=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

7. 求微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^x+x$ 的通解.

8. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n+1}$ 的收敛域及和函数.

四、应用题（每题 7 分，共 7 分）

1. 求曲线 $y=-x^2+4$ 与直线 $y=-2x+4$ 所围成的图形的面积.

烟台大学统招专升本培训中心

五、证明题（每题 7 分，共 14 分）

1. 证明：当 $x>1$ 时，$x+\ln x>4\sqrt{x}-3$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(1)=1$. 证明：对于任意实数 $\lambda\in(0,1)$，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{\lambda}{\xi^2}$.

烟台大学统招专升本培训中心

山东省 2020 年普通高等教育专升本统一考试
高等数学（Ⅰ）试题答案解析

一、单项选择题

1. (C)

解：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量．因为

$\lim\limits_{x\to 0} e^x=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+2)=\ln 2$，$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，而 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，答案选（C）．

2. (B)

解：平面 $2x-3y+4z=8$ 的法向量为 $\vec{n}=(2,-3,4)$，直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{4}$ 的方向向量为 $\vec{a}=(2,-3,4)$，显然 $\vec{n}\parallel\vec{a}$，因此平面与直线垂直，答案选（B）．

3. (D)

解：微分方程的特征方程为 $r^2+7r-8=0$，解得 $r_1=-8$，$r_2=1$，显然特征方程存在两个不同的实根，根据微分方程的通解公式可知方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-8x}$，答案选（D）．

4. (A)

解：$y'=6x^2+6x$，$y''=12x+6$，当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，$y''=0$．又当 $x<-\dfrac{1}{2}$ 时，$y''<0$，函数为凸函数；当 $x>-\dfrac{1}{2}$ 时，$y''>0$，函数为凹函数，因此当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，函数取得拐点 $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，答案选（A）．

5. (C)

解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n^2+1}{n^3+2n^2}}{\dfrac{1}{n}}=1$，根据正项级数比较法的极限形式可知，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2+1}{n^3+2n^2}$ 的敛散性与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 相同，因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2+1}{n^3+2n^2}$ 发散．$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{n\pi}{3}\neq 0$，根据级数收敛的必要条件可知，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\dfrac{n\pi}{3}$ 发散．当 $n\to\infty$ 时，$\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\sim\dfrac{1}{n^2}$，根据正项级数比较法的极限形式可知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 相同，所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ 收敛．由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{n+1}}{2^{n+1}+1}}{\dfrac{3^n}{2^n+1}}=\frac{3}{2}>1$$

根据正项级数比值判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n}{2^n+1}$ 发散．

答案选（C）．

二、填空题

1. $[3,+\infty)$

解：由题意可知，函数的定义域满足 $\dfrac{x}{3}-1\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 3$，

因此函数的定义域为 $[3,+\infty)$．

2. $y=x$

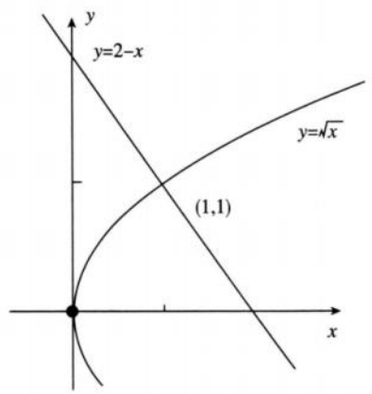
解：$y'(1)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}\Big|_{x=1}=1$，则切线方程为 $y-1=1\cdot(x-1)$，整理得 $y=x$．

3. 2

解：由题意可知，$\int_a^b[2f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x=2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+3\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=8$，又因为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1$，因此 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=2$．

4. $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{6},\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)$

解：$\overrightarrow{AB}=(2-(-1),-3-2,\sqrt{2}-0)=(3,-5,\sqrt{2})$，则 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+(-5)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{36}=6$，则单位向量为 $\vec{e}=\dfrac{1}{6}(3,-5,\sqrt{2})=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{6},\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)$．



5. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x$

解：积分区域如图所示，转化成 Y 型区域为 $\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 1\\ y^2<x<2-y\end{cases}$，因此交换累次积分顺序之后为

烟台大学统招专升本培训中心

$$\int_0^1 dy\int_{y^2}^{2-y} f(x,\ y)dx.$$

三、计算题

1. **解**：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+x+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x}{x^3+x+2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=2.$$

2. **解**：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}$

$$=\frac{1}{3}.$$

3. **解**：$\int\dfrac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx=\int\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx+\int\dfrac{\ln x}{x}dx$

$$=2\sqrt{x}+\int\ln x\,d(\ln x)$$

$$=2\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln^2 x+C.$$

4. **解**：由已知，两个平面的法向量分别为所求平面的法向量为：

$$\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&-1\\2&1&3\end{vmatrix}=7\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}.$$

即 $\vec{n}=(7,\ -5,\ -3)$

又平面过点 $(1,\ -2,\ 2)$

得平面的方程为：$7(x-1)-5(y+2)-3(z-2)=0$

化简为：$7x-5y-3z-11=0$.

5. **解**：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sin\dfrac{y}{x}+x\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)\cos\dfrac{y}{x}$

$$=\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}$$

$$=\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}.$$

6. **解**：令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

则 D 在极坐标系下化为：$0\leqslant r\leqslant\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$，$\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3}$

因此，$\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}r\cos r^2\,dr$

$$=\frac{\pi}{6}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}r\cos r^2\,dr$$

$$=\frac{\pi}{12}\sin r^2\,\Big|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\frac{\pi}{12}.$$

7. **解**：此方程为一阶非齐次线性微分方程，其中 $P(x)=1$，$Q(x)=e^x+x$

由公式得通解为：$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

$$=e^{-\int dx}\left[\int(e^x+x)\,e^{\int dx}+C\right]$$

$$=e^{-x}\left[\int(e^x+x)\,e^x\,dx+C\right]$$

$$=e^{-x}\left(\int e^{2x}dx+\int x e^x dx+C\right)$$

$$=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+xe^x-e^x+C\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^x+x-1+Ce^{-x},\ C\in\mathbf{R}.$$

8. **解**：记 $a_n=\dfrac{1}{n+1}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n+2}=1$，

故收敛半径是 $R=1$，收敛区间是 $(-1,\ 1)$.

又因为当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n\to0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散，

当 $n=-1$ 时，$\sum\limits_{n\to0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛，

所以收敛域为 $[-1,\ 1)$.

设 $S=(x)=\sum\limits_{x\to0}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n+1}$，$g(x)=\sum\limits_{x\to0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$，$x\in(-1,\ 1]$.

则 $S(x)=xg(x)$.

当 $x\in(-1,\ 1)$ 时，$g'(x)=\sum\limits_{x\to0}^{\infty}\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum\limits_{x\to0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$，

烟台大学统招专升本培训中心

则 $g(x)=\int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x)$，$x\in[-1,1)$.

从而 $S(x)=xg(x)=-x\ln(1-x)$，$x\in[-1,1)$.

四、应用题

1. **解**：由 $\begin{cases}y=-x^2+4\\y=-2x+4\end{cases}$ 得交点为 $(0,4)$，(2.0).

所求的图形的面积为：

$$S=\int_0^2[(-x^2+4)-(-2x+4)]\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2(-x^2+2x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big|_0^2$$

$$=\frac{4}{3}.$$

五、证明题

1. **证明**：令 $f(x)=x+\ln x-4\sqrt{x}+3$，$x\in[1,+\infty)$.

则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导，且当 $x\in(1,+\infty)$ 时，

$$f'(x)=1+\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2>0.$$

所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

从而当 $x>1$ 时，有 $f(x)>f(1)=0$，

即 $x+\ln x>4\sqrt{x}-3$.

2. **证明**：对于任意的实数 $\lambda\in(0,1)$，令 $F(x)=x^2f(x)-\lambda$，$x\in[0,1]$.

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，

且 $F(0)=-\lambda<0$，$F(1)=f(1)-\lambda=1-\lambda>0$，

则由连续函数的零点定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，

即 $\xi^2f(\xi)-\lambda=0$，从而 $f(\xi)=\frac{\lambda}{\xi^2}$.

烟台大学统招专升本培训中心